N° d'ordre :

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Alain LAVERNE

TITRE

Structure des noyaux ^3H et ^3He par les équations de Faddeev dans l'espace de configuration

---

Soutenue le 1er Juin 1973, devant la Commission d'Examen

JURY

MM. J. GILLESPIE — *Président*

Y. AYANT
H. P. NOYES
R. PIEPENBRING — *Examinateurs*

N° d'ordre :

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Alain LAVERNE

TITRE

Structure des noyaux ^3H et ^3He par les équations de Faddeev dans l'espace de configuration

---

Soutenue le 1er Juin 1973, devant la Commission d'Examen

JURY

MM. J. GILLESPIE — *Président*

Y. AYANT
H. P. NOYES
R. PIEPENBRING — *Examinateurs*

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

It seems to me very important that the things which are an advantage for the sort of calculation you do on the back of an envelope are not always advantages when we use a computer, and we must go on learning this lesson.

R.E. PEIERLS

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534920_0026

S O M M A I R E

Pages

Introduction 1

Sommaire

I L'équation de Faddeev pour trois particules 4
identiques, dans l'espace de configuration

1 L'amplitude de Faddeev 55

2 Les états de base pour trois nucléons 7

3 Le système intégro différentiel pour les 9
amplitudes de Faddeev

4 Quelques remarques 13

5 Une nécessité pratique : la troncation 15

6 Que choisir ? 17

II Un algorithme de résolution du système de Faddeev 18

1 Notations 18

2 Analogie avec une situation bien connue 20

3 Une méthode élementaire 21

4 L'itération inverse 26

5 La sur - relaxation 27

6 Un autre choix de coordonnées 31

7 Les critères d'arrêt 33

8 L'intendance 34

III Brève disgression sur des potentiels pour l'interaction
nucléon-nucléon 36

1 Caractéristiques d'un potentiel nucléon nucléon 36

2 Un potentiel dur : celui de Reid à coeur mou ! 38

3 Un potentiel gaussien 40

4 Un potentiel très mou 42

IV Quelques résultats 45
1 Les conditions d'obtention 45
2 Comparaison des méthodes de calcul..... 46
3 Comparaison des choix de troncations..... 48
4 Trois nucléons et des potentiels 50
5 L'énergie du triton.... 50
6 .... et le reste 53
7 La différence d'énergie triton-hélium trois 60
8 Les facteurs de forme électriques 64

V Conclusions 70
1 Les équations de Faddeev dans l'espace 70
de configuration...
2 ... et leur résolution numérique 71
3 Que peut-on en faire d'autre ? 72
4 Que peut-on en tirer ? 73
5 Le problème du triton a t-il un intérêt ? 74

Appendice A
Elements de matrice entre états à trois corps 76
Interaction dépendant de l'isospin 77

Appendice B
La fonction géométrique $h^{L}_{\lambda'\Lambda'\lambda\Lambda}(x,y,u)$..... 79

Appendice C
Le terme de source en coordonnées polaires 80
L'équation de relaxation en coordonnées polaires 81

Références 83

I N T R O D U C T I O N

L'état fondamental du triton, avatar moderne du vieux problème à trois corps, a été, au cours de ces dix dernières années, l'objet de soins peut être immérités. L'analyse théorique de la structure du triton, si elle commence à devenir possible (comme l'ont sans doute écrit des chercheurs chaque année), voit cependant son interprétation, lors de sa comparaison avec l'observation, stérilisée par le trop grand nombre d'inconnues de la nature intervenant sur le résultat : voici par exemple quelques unes des questions que l'on peut se poser, en cas de désaccord entre la réponse d'un calcul en lequel on a toute confiance et la réponse naturelle :

Peut-on représenter l'interaction de deux nucléons par un potentiel ?

Ce potentiel est-il local ou non ? Doit-il avoir un coeur dur ?

Le potentiel a-t-il le bon comportement hors couche d'énergie ?

Les nucléons dans le triton vont-ils en général assez lentement pour que l'on soit en droit de les considérer comme non relativistes ?

Existe-t-il une force à trois nucléons, ou plutôt, se manifeste-t-elle?

Il est hors de doute que la seule considération du triton ne peut permettre de répondre à toutes ces questions.

L'étude de trois nucléons en diffusion doit donc venir compléter celle du triton. Le relatif échec de celle-ci ne doit toutefois pas servir d'alibi à celle-là, car la possibilité est aussi douteuse de

concevoir des expériences de diffusion permettant de mettre en évidence isolément les effets ci-dessus.

La situation serait encore trop belle si on savait résoudre le problème du triton en toute confiance. La multiplicité des méthodes sans même considérer celle des résultats, suffit à montrer que tel n'est pas le cas. Toutefois, on a assisté, dans la dernière année, à une certaine convergence, puisque des méthodes aussi différentes que le calcul variationnel, la résolution des équations de Faddeev dans l'espace des impulsions, soit complétement, soit par l'approximation de pôle unitaire et la résolution de l'équation de Schrödinger sur la base des harmoniques hypersphériques, commencent à fournir des résultats relativement voisins.

Nous apportons notre contribution à cette pléthore, en proposant de résoudre les équations de Faddeev dans l'espace de configuration, par une méthode dont l'originalité doit remonter à un bon demi siècle ; les résultats en semblent tout aussi bons, sa simplicité et la rapidité de son exploitation dans des problèmes réalistes pourraient être des arguments en sa faveur. Nous décrivons cette méthode ainsi que quelques résultats obtenus pour le triton avec les potentiels nucléon-nucléon réalistes de Reid et de de Tourreil et Sprung ; ces résultats nous permettent d'ébaucher des tentatives de réponses aux questions soulevées par leur désaccord persistant avec ceux des expérimentateurs. Cet exposé est rédigé dans un but administratif, sinon scientifique, et on n'y trouvera peu qui ne soit publié par ailleurs.

L'idée de considérer les équations de Faddeev dans l'espace de configuration s'est imposée après de multiples discussions avec Claude Gignoux pour tenter de résoudre le fabuleux problème du coeur dur ; ce travail doit tout à sa collaboration. C'est la confiance d'Alain Hervé en la méthode des surrelaxations successives, qui nous

a encouragés à essayer celle-ci pour résoudre les équations de Faddeev. Enfin, nous remercions tous ceux qui par leurs contributions, directes et indirectes, nous ont fourni les moyens matériels nécessaires à la réalisation de ce travail.

I - L'EQUATION DE FADDEEV POUR TROIS PARTICULES IDENTIQUES DANS L'ESPACE DE CONFIGURATION

Noyes et Fiedeldey [1,2] ont les premiers donné les équations de Faddeev pour trois particules dans leur espace de configuration afin d'étudier les difficultés du problème à trois corps dans le domaine d'énergie continue. Toutefois ces équations sont établies pour trois particules sans spin et sont sous une forme peu adaptée au calcul numérique. C'est pourquoi une nouvelle dérivation a été nécessaire, dont nous allons donner les principaux résultats, les détails complémentaires étant disponibles dans la référence [3].

On considère trois particules identiques repérées par $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$, $\vec{R}_3$ par rapport à une origine fixe. Les positions des trois particules par rapport à leur centre de masse sont entièrement déterminées par les deux vecteurs :

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \vec{R}_2 - \vec{R}_3 \\ \vec{y}_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\vec{R}_2 + \vec{R}_3}{2} - \vec{R}_1 \right) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \vec{x}_2 = \\ \vec{y}_2 = \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \vec{x}_3 = \\ \vec{y}_3 = \end{cases} \tag{1}$$

dont la signification géométrique est la suivante :

Aux coordonnées relatives $\vec{x}_1$ et $\vec{y}_1$ correspondent les coordonnées conjuguées $\vec{p}_1$ et $\vec{q}_1$ et les moments cinétiques orbitaux :

$$\begin{cases} \vec{l}_1 = \vec{x}_1 \wedge \vec{p}_1 \\ \vec{\lambda}_1 = \vec{y}_1 \wedge \vec{q}_1 \end{cases} \tag{2}$$

$\vec{l}_1$ est l'opérateur moment cinétique orbital relatif des particules 2 et 3, $\vec{\lambda}_1$ l'opérateur moment cinétique orbital de la particule 1. Le moment cinétique orbital total du système est :

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{\lambda}_1 = \vec{l}_2 + \vec{\lambda}_2 = \vec{l}_3 + \vec{\lambda}_3 \qquad (3)$$

et l'opérateur énergie cinétique totale dans le système du centre de masse :

$$H_o = p_1^2 + q_1^2 = p_2^2 + q_2^2 = p_3^2 + q_3^2$$
$$= \frac{\hbar^2}{M}\left[-\frac{1}{x_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}x_1 + \frac{1}{x_1^2}\left(\frac{\vec{l}_1}{\hbar}\right)^2 - \frac{1}{y_1}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}y_1 + \frac{1}{y_1^2}\left(\frac{\vec{\lambda}_1}{\hbar}\right)^2\right] \qquad (4)$$

(et analogues)

où M est la masse commune aux trois particules

1 - <u>L'amplitude de Faddeev</u>

Soit Φ_J la fonction d'onde d'un état du système de trois fermions ayant un bon moment cinétique total J. Cette fonction d'onde doit être antisymétrique par rapport à l'opération échange de deux quelconques des particules du système. Un moyen commode de construire cette fonction antisymétrique est d'utiliser une autre fonction :

$$\Psi_1 = \Psi(1, 2, 3) \qquad (5)$$

antisymétrique seulement par rapport à l'échange des particules n° 2 et 3. Dans la notation $\Psi(1, 2, 3)$, les chiffres désignent les particules et les trois positions qu'ils occupent représentent les trois emplacements occupés par les particules dans l'espace. La fonction d'onde totalement antisymétrique est alors donnée par :

$$\Phi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 \qquad (6)$$
$$= (1 + P^+ + P^-) \cdot \Psi(1, 2, 3) \qquad (7)$$

ce qui définit les opérateurs de permutation :

$$P^+ \psi(1,2,3) = \psi(2,3,1)$$
$$P^- \psi(1,2,3) = \psi(3,1,2) \qquad (8)$$

et le problème de la recherche de la fonction d'onde Φ est ramené à celui de la recherche des fonctions ψ_i . Or, précisément, les équations de Faddeev :

$$(E - H_c - V_1)\,\psi_1 = V_1\,(\psi_2 + \psi_3)$$
$$(E - H_c - V_2)\,\psi_2 = V_2\,(\psi_3 + \psi_1) \qquad (9)$$
$$(E - H_c - V_3)\,\psi_3 = V_3\,(\psi_1 + \psi_2) \quad ,$$

où $V_1 = V_1(\vec{x}_1)$ est le potentiel d'interaction entre les particules n° 2 et 3, etc... et E l'énergie totale dans le système du centre de masse, ont pour solution les fonctions ψ_1 , ψ_2 et ψ_3 telles que la fonction d'onde du système de trois particules est $\Phi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ pour le potentiel total $V = V_1 + V_2 + V_3$. Dans le cas de trois fermions, où la fonction d'onde Φ est totalement antisymétrique, $\psi_2 = P^+\psi_1$ et $\psi_3 = P^-\psi_1$ sont des solutions, et le problème est ramené à la recherche d'une seule fonction, ψ_1 ,simplement antisymétrique dans l'échange des particules n° 2 et 3 et qui soit solution de :

$$(E - H_c - V_1)\,\psi_1 = V_1\,(P^+ + P^-)\,\psi_1 \qquad (10)$$

C'est probablement là que réside le principal avantage de la résolution de l'équation de Faddeev sur la résolution de l'équation de Schrödinger en ce qui concerne le problème de l'état lié de trois fermions identiques : les considérations de spin, isospin, et moment cinétique orbital permettent facilement de construire des fonctions ψ_1 antisymétriques par rapport aux particules 2 et 3 et

on est ensuite certain d'obtenir facilement une fonction d'onde totalement antisymétrique ; la recherche directe de Φ, antisymétrique par rapport aux trois fermions, comme solution de l'équation de Schrödinger, semble par contre pratiquement malaisée (4-6)

Le problème est donc de trouver l'amplitude de Faddeev $\psi(\vec{x},\vec{y})$, de décroissance suffisamment rapide pour être de carré intégrable (état lié), antisymétrique dans l'échange des particules n° 2 et 3, et solution de l'équation de Faddeev dans la voie 1 (2-3) :

$$\left\{E - \frac{\hbar^2}{M}\left[-\frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}x - \frac{1}{y}\frac{\partial^2}{\partial y^2}y + \frac{1}{x^2}\left(\frac{\vec{L}}{\hbar}\right)^2 + \frac{1}{y^2}\left(\frac{\vec{\lambda}}{\hbar}\right)^2\right]\right.$$
$$\left. - V(\vec{x})\right\}\psi(\vec{x},\vec{y}) = V(\vec{x}).(P^+ + P^-).\psi(\vec{x},\vec{y}) \qquad (11)$$

Permuter les particules ne change pas le moment cinétique total du système, aussi l'amplitude de Faddeev doit représenter trois particules avec le bon moment cinétique total $\mathcal{J}$; on la notera $\psi_{\mathcal{J}}(\vec{x},\vec{y})$ Nous allons séparer dans ψ les fonctions radiales, les fonctions angulaires, et les fonctions des spins et isospins. Nous avons pour cela besoin des fonctions de base de trois fermions dans ces différents espaces.

2 - Les états de base pour trois nucléons

Dans l'espace des spins, on peut construire trois états de base χ_i pour trois particules avec les bons nombres quantiques indiqués :

s_1	σ ($\Leftrightarrow \vec{s}_2 + \vec{s}_3$)	S ($\Leftrightarrow \vec{s}_1 + \vec{\sigma}$)	
1/2	0	1/2	χ_0
1/2	1	1/2	χ_1
1/2	1	3/2	χ_2

(12)

Des fonctions de base η_i du même type peuvent être construites dans l'espace de l'isospin

t_1	t ($\leftrightarrow \vec{t}_2 + \vec{t}_3$)	T ($\leftrightarrow \vec{t}_1 + \vec{t}$)	
1/2	0	1/2	η_0
1/2	1	1/2	η_1
1/2	1	3/2	η_2

(13)

Il est intéressant pour la suite d'utiliser des états de base $e^{\alpha S T}$, dans l'espace des spins et isospins, qui soient états propres de l'opérateur P_{23} échangeant les particules n° 2 et 3.(7) L'indice α a les valeurs A, -, + ou S, suivant que $e^{\alpha S T}$ est antisymétrique par rapport à tous les échanges possibles, antisymétrique dans P_{23} seulement, symétrique dans P_{23} seulement, ou totalement symétrique. Ces états de base sont, bien entendu, au nombre de 9 :

α	S	T	$e^{\alpha S T}$
A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$(\chi_1\eta_0 - \chi_0\eta_1)/\sqrt{2}$
-			$(\chi_1\eta_0 + \chi_0\eta_1)/\sqrt{2}$
+			$(\chi_0\eta_0 - \chi_1\eta_1)/\sqrt{2}$
S			$(\chi_0\eta_0 + \chi_1\eta_1)/\sqrt{2}$
-	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\chi_0\eta_2$
+			$\chi_1\eta_2$
-	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\chi_2\eta_0$
+			$\chi_2\eta_1$
S	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\chi_2\eta_2$

(14)

Les fonctions de base de l'espace des fonctions des directions $\hat{x}$ et $\hat{y}$ de $\vec{x}$ et de $\vec{y}$ sont construites à l'aide des harmoniques sphériques de ces deux directions :

$$\mathcal{Y}^{M}_{\lambda l L}(\hat{y},\hat{x}) = \sum_{m_\lambda m_l} \langle \lambda\, m_\lambda\, l\, m_l \mid L\, M \rangle\, Y_\lambda^{m_\lambda}(\hat{y})\, Y_l^{m_l}(\hat{x}) \qquad (15)$$

Ainsi, les fonctions de base $\mathcal{Y}^{M}_{\lambda l L}(\hat{y},\hat{x})$ ont en particulier comme bons nombres quantiques :

λ pour le moment orbital de la particule 1, "libre", par rapport au centre de masse du système ;

l pour le moment orbital relatif des particules 2 et 3, "interagissantes" ;

L pour le moment orbital total du système de trois particules.

3 - Le système intégro différentiel pour les amplitudes de Faddeev :

Nous pouvons maintenant développer l'amplitude de Faddeev sur les bases que nous avons définies pour les différents espaces :

$$\Psi_j(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{\substack{\alpha S T \\ \lambda l L}} \frac{\Psi^{\alpha S T}_{\lambda l L}(x,y)}{xy} \cdot \left[e^{\alpha S T} \otimes \mathcal{Y}_{\lambda l L}(\hat{y},\hat{x}) \right]_j \qquad (16)$$

que nous appellerons développement sur la base L - S. Il est à remarquer que ce développement est infini et nous aurons à revenir sur ce point, important pour la résolution effective des équations de Faddeev. Toutefois plusieurs conditions sont à respecter par les indices de sommation, en particulier :

la condition d'antisymétrie de $\Psi_j(\vec{x},\vec{y})$ dans l'opération P_{23} implique des comportements opposés pour $e^{\alpha S T}$ et $\mathcal{Y}_{\lambda l L}(\hat{y},\hat{x})$, soit :

$$(-)^{l} \langle e^{\alpha S T} \mid P_{23} \mid e^{\alpha S T} \rangle = -1 \qquad (17)$$

ou encore, l pair si $\alpha = A, -$ et l impair si $\alpha = +, S$;

l'amplitude de Faddeev, comme la fonction d'onde, est état propre de la réflexion spaciale, si P est la parité de l'état lié considéré (+ 1 pour trois nucléons) on doit donc respecter la condition :

$$(-)^{\lambda + l} = P \qquad ; \tag{18}$$

Les moments cinétiques L et S doivent pouvoir se recoupler pour donner le moment cinétique total $\mathcal{J}$ imposé (1/2 pour trois nucléons), la limitation des valeurs de S (1/2 et 3/2) restreint donc les valeurs possibles de L et donc finalement aussi celles de λ et l.

L'introduction du dénominateur xy dans le développement (16) et la condition de régularité de la fonction d'onde imposent d'autre part :

$$\Psi^{\alpha S T}_{\lambda l L}(x,0) \equiv \Psi^{\alpha S T}_{\lambda l L}(0,y) \equiv 0 \tag{19}$$

L'utilisation du développement (16) pour l'amplitude de Faddeev nous permet maintenant d'écrire l'équation de Faddeev (11) sous forme d'un système d'équations différentielles couplées à deux variables scalaires indépendantes, x et y :

$$\left\{E + \frac{\hbar^2}{M}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{y^2}\right]\right\} \Psi^{\alpha S T}_{\lambda l L}(x,y)$$

$$= \sum_{\substack{\alpha' S' T' l' L' \\ \alpha'' \lambda'' l''}} xy \left\langle \left[e^{\alpha S T} \otimes \mathcal{Y}_{\lambda l L}\right]_{\mathcal{J}} \middle| V(\vec{x}) \middle| \left[e^{\alpha' S' T'} \otimes \mathcal{Y}_{\lambda' l' L'}\right]_{\mathcal{J}} \right\rangle$$

$$\left\langle \left[e^{\alpha' S' T'} \otimes \mathcal{Y}_{\lambda' l' L'}(\hat{y},\hat{x})\right]_{\mathcal{J}} \middle| (1 + P^+ + P^-) \middle| \frac{\Psi^{\alpha'' S' T'}_{\lambda'' l'' L'}(x,y)}{xy} \left[e^{\alpha'' S' T'} \otimes \mathcal{Y}_{\lambda'' l'' L'}(\hat{y},\hat{x})\right]_{\mathcal{J}} \right\rangle$$

Plusieurs régles de sélection ont été utilisées pour parvenir à l'expression (20) :

la particule "libre" 1, de position $\vec{y}$, est insensible au potentiel $V(\vec{x})$, aussi la matrice de ce potentiel dans les bases de spin, isospin et directions spatiales est diagonale par rapport au moment orbital de cette particule ; λ n'est pas modifié par $V(\vec{x})$;

le moment cinétique orbital $\vec{L}$, le spin $\vec{S}$ et l'isospin $\vec{T}$ du système de trois particules ne sont évidemment pas modifiés par une permutation de ces particules ; les nombres quantiques L', S' et T' sont conservés lors de l'application des permutations.

De simples calculs de découplage et recouplage de moments cinétiques, utilisant les définitions des états de base $e^{\alpha S T}$ (14) et $\mathcal{Y}_{\lambda l L}(\hat{y}, x)$ (15), permettent d'exprimer l'élément de matrice de l'interaction à deux corps entre états à trois corps en une combinaison linéaire des éléments de matrice d'interaction à deux corps usuels $V^{\sigma J}_{l l'}(x)$ caractérisés par un bon moment cinétique orbital (l ou l'), un bon spin (σ) et un bon moment cinétique total (J) pour la paire de particules n° 2 et 3 "en interaction" à la distance x (voir appendice A).

L'élément de matrice des opérateurs de permutation entre états à trois corps est plus compliqué à évaluer. Pour la partie spin-isospin, la définition (14) des états $e^{\alpha S T}$ conduit aux valeurs des élements de matrice

$$P_{\alpha\alpha'} = \langle e^{\alpha S T} | P^{+} | e^{\alpha' S T} \rangle \qquad (21)$$

suivantes :

α \ α'	A	−	+	S
A	1	.	.	.
−	.	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	.
+	.	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	.
S				

En ce qui concerne la partie spatiale, on a d'après la définition (8) de l'opérateur de permuation P^+ :

$$P^+ \frac{\Psi^{\alpha S T}_{\lambda l L}(x,y)}{xy} \mathcal{Y}_{\lambda l L}(\hat{y},\hat{x}) = \frac{\Psi^{\alpha S T}_{\lambda l L}(x',y')}{x'y'} \mathcal{Y}_{\lambda l L}(\hat{y}',\hat{x}') \tag{23}$$

où $\vec{x}'$ et $\vec{y}'$ sont les positions $\vec{x}_2$ et $\vec{y}_2$ dans la voie 2 (3-1), données par la définition (1) qui entraîne directement :

$$\begin{cases} \vec{x}' = -\vec{x}/2 + \vec{y}\sqrt{3}/2 \\ \vec{y}' = -\vec{x}\sqrt{3}/2 - \vec{y}/2 \end{cases} \tag{24}$$

Le second membre de l'équation (23) peut se développer sur les fonctions de base $\mathcal{Y}_{\lambda' l' L}(\hat{y},\hat{x})$, et nous définissons ainsi des fonctions purement géométriques $h^L_{\lambda' l' \lambda l}(x, y, u)$:

$$\frac{P^+ \Psi^{\alpha S T}_{\lambda l L}(x,y)}{xy} \mathcal{Y}_{\lambda l L}(\hat{y},\hat{x}) = \sum_{\lambda' l'} \frac{\mathcal{Y}_{\lambda' l' L}(\hat{y},\hat{x})}{xy} \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} du \; h^L_{\lambda' l' \lambda l}(x,y,u) \cdot \Psi^{\alpha S T}_{\lambda l L}(x',y') \tag{24}$$

où d'après la propriété (24), x' et y' sont donnés par :

$$\begin{cases} x' = (x^2 - 2\sqrt{3}\, x\, y\, u + 3\, y^2)^{1/2}/2 \\ y' = (3\, x^2 + 2\sqrt{3}\, x\, y\, u + y^2)^{1/2}/2 \end{cases} \tag{25}$$

Une expression permettant le calcul de la fonction $h^{L}_{\lambda' l' \lambda l}(x,y,u)$ est donnée dans l'appendice B. Fort heureusement, les contributions des opérateurs de permutation P^+ et P^- sont globalement les mêmes et le système d'équations (20) devient finalement :

$$\left\{E + \frac{\hbar^2}{M}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{y^2}\right]\right\} \psi^{\alpha S T}_{\lambda l L}(x,y)$$

$$= \sum_{\alpha' S' T' l' L'} \left\langle \left[e^{\alpha S T} \otimes \mathcal{Y}_{\lambda l L}\right]_J \middle| V(\vec{x}) \middle| \left[e^{\alpha' S' T'} \otimes \mathcal{Y}_{\lambda' l' L'}\right]_J \right\rangle$$

$$\left[\psi^{\alpha' S' T'}_{\lambda' l' L'}(x,y) + \sum_{\alpha'' \lambda'' l''} P_{\alpha' \alpha''} \int_{-1}^{1} du \; h^{L'}_{\lambda' l' \lambda'' l''}(x,y,u) \; \psi^{\alpha'' S' T'}_{\lambda'' l'' L'}(x',y')\right] \tag{26}$$

4 - Quelques remarques

Ce système d'équations, que nous nous proposons de résoudre, appelle plusieurs remarques. Nous voyons que l'énergie totale E du système de trois particules intervient en qualité de valeur propre d'un opérateur linéaire. Ainsi, la recherche de l'énergie d'un état lié de trois particules par la résolution des équations de Faddeev dans l'espace de configuration se réduit à un problème de recherche de valeur propre. Ceci est, non seulement formellement, mais aussi pratiquement, un avantage considérable sur les méthodes consistant à utiliser les équations de Faddeev dans l'espace des quantités de mouvement p et q conjuguées de x et y et dans lesquelles l'énergie E n'apparaît qu'implicitement [8,9]. L'énergie apparaît ici en tant que valeur propre, parce que le potentiel d'interaction nucléon-nucléon intervient directement au lieu d'une matrice de transition T à deux corps dont les élements dépendent implicitement de l'énergie. Un autre avantage vient donc de ce qu'en général une interaction nucléon-nucléon est proposée sous forme de potentiel dans l'espace

de configuration et qu'alors la détermination des élements de la matrice de transition nécessite la résolution préalable de l'équation de Lippmann-Schwinger, ou l'utilisation d'approximations séparables qui, bien qu'elles aboutissent [10,11], laissent subsister un sentiment de malaise à cause de la forte non localité introduite dans l'interaction à deux corps.

Une autre méthode proposée pour résoudre les équations de Faddeev consiste à exprimer celles ci dans l'espace mixte des grandeurs $\vec{x}$ et $\vec{q}$ [12-14]. On obtient ainsi un système d'équations intégro-différentielles ; la duplicité des intégrales intervenant, opposée à la simplicité de celles figurant dans le système (26), rend l'emploi de cette méthode moins aisé tout au moins en ce qui concerne la recherche des états liés.

D'autres raisons, plus subjectives, viennent encourager l'utilisateur éventuel du système (26). Nous sommes sensuelement plus familiarisés avec l'espace des positions qu'avec l'espace des quantités de mouvement. Trois particules liées constituent un objet confiné dans l'espace ; ainsi, le principe de correspondance quantique position - quantité de mouvement rend l'espace de configuration plus adapté à la description de ces trois particules. Finalement, il se trouve que disposant d'une fonction d'onde pour un état lié, les observables correspondant à cet état sont pratiquement plus facilement calculables si la fonction d'onde est donnée dans l'espace de configuration.

Pour des raisons de commodité, nous avons supposé le potentiel d'interaction local, mais il est clair que la structure des équations (26) n'est pas modifiée par une éventuelle non localité de l'interaction à deux corps. La méthode de résolution que nous proposerons dans le chapitre suivant n'est certainement pas affectée par une non localité du potentiel, tout au plus de faible extension, qui semble actuellement la plus probable [2]

5 - Une nécessité pratique : la troncation

Tel qu'il se présente, le système d'équations (26) est encore impropre à la résolution réaliste du problème de l'état lié de trois nucléons car, en toute généralité, le développement (16) de l'amplitude de Faddeev est infini et le système (26) est donc de rang infini. Il nous faut pratiquement réduire ce rang.

Considérons le développement (16) sur la base L - S. Comme on l'a vu, ce développement est infini, tout au moins en ce qui concerne les nombres quantiques λ et l lorsqu'on considère un état de bon moment cinétique total J. Une méthode consiste donc à tronquer le développement (16), guidés par l'idée que des états de λ et l élevés sont sans doute peu importants dans la fonction d'onde d'un état lié (7) et qu'ils ne sont donc probablement pas plus importants dans l'amplitude de Faddeev, hypothèse que l'on vérifie " a posteriori". L'examen du système (26) montre que ce procédé revient à négliger les élements de matrice de l'interaction à deux corps $V(\vec{x})$ entre deux états à trois corps lorsqu'au moins un de ces deux états appartient à l'ensemble des états abandonnés dans le développement (16). Ainsi on passe de l'interaction à deux corps $V(\vec{x})$ donnée à une interaction effective dans l'espace des états de trois particules. On trouve ensuite, directement, les éléments de matrices $V^{\alpha J}_{ll'}(\kappa)$ de l'interaction à deux corps intervenant encore dans le problème. Par exemple, pour l'étude de la fonction d'onde du triton dans la référence[15], les états à trois corps suivants ont été considérés :

n°	λ	l	L	α	S	T
1	0	0	0	A	1/2	1/2
2	0	2	2	-	3/2	1/2
3	0	0	0	-	1/2	1/2
4	2	0	2	-	3/2	1/2
5	2	2	0	A	1/2	1/2
6	2	2	0	-	1/2	1/2

(27)

l'amplitude de Faddeev (16) développée sur les états n° 1, 2, 3, fait intervenir les interactions à deux corps dans les états ^1S_o $^3S_1$, $^3D_1$, et $^3S_1 - ^3D_1$. Cette amplitude, lorsque développée sur les états n° 1...., 6, fait intervenir les interactions ^1S_o, $^3S_1$, $^3S_1 - ^3D_1$, $^1D_2$, $^3D_1$, $^3D_2$ et $^3D_3$. L'étude de la différence entre les noyaux ^3H et ^3He, réf (16), a été faite sur la base des états n° 1, 2, 3 plus une composante (0 0 0 - 1/2 3/2), et outre les interactions dans les états pairs $J \leqslant 1$, fait intervenir l'interaction nucléon-nucléon dans les différents états de projection de l'isospin de la paire.

Une autre méthode de réduction du rang du système (26), proposée par Harper et al[17], consiste à choisir au départ les états à deux corps dans lesquels l'interaction à deux corps agit. On remplace ainsi l'interaction $V(\vec{x})$ donnée par une interaction effective dans l'espace des états de deux particules. Cette limitation du nombre des états à deux corps disponibles réduit, bien sûr, le nombre des états à deux à trois corps constructibles, et ainsi le rang du système à résoudre. Il faut toutefois prendre garde que les amplitudes de Faddeev dans la base L - S ne sont plus indépendantes[18] ce qui permet une réduction supplémentaire du rang du système(26) Le mode de couplage j - J peut être utilisé pour déterminer le nombre de combinaisons des amplitudes L - S indépendantes ainsi que leurs coefficients. Un cas résolu effectivement[19-20] est celui de l'interaction réaliste tronquée aux états ^1S_o, $^3S_1$, $^3D_1$ et $^3S_1 - ^3D_1$. Les états à trois corps en couplage j - J alors impliqués sont :

n°	particules n° 1 "libre" (λ 1/2) j	paire 2-3 ($l\sigma$) J	état de la paire
1	(0 1/2) 1/2	(0 0) 0	^1S_o
2	(0 1/2) 1/2	(2 1) 1	$^3D_1$
3	(0 1/2) 1/2	(0 1) 1	$^3S_1$
4	(2 1/2) 3/2	(0 1) 1	$^3S_1$
5	(2 1/2) 3/2	(2 1) 1	$^3D_1$

Un simple examen des possibilités de couplage des moments cinétiques au moment cinétique total $\mathcal{J} = 1/2$, montre que les états j - J n°1,...4 du tableau (28) sont identiques un à un aux états L - S n° 1,...4 du tableau (27). L'état j - J n° 5 se développe sur quatre autres états l - S avec $\lambda = 2$, $l = 2$; ce développement permet d'utiliser toutes les formules que nous avons données en couplage L - S et de réduire ainsi le problème à la recherche de cinq amplitudes solutions d'un système du type (26) de rang cinq.

6 - Que choisir ?

Il est difficile de conclure a priori sur le meilleur choix d'une méthode de troncation [21], et il nous semble que seul les résultats comparés des deux types de calculs peuvent permettre une ébauche de jugement sur ce point, encore qu'une valeur plus basse de l'énergie d'état lié obtenue risque de n'être que le reflet de l'astuce du physicien dans le choix des termes de l'interaction, effective dans les états à deux corps ou à trois corps, les plus attractifs. Le calcul de type perturbatif des contributions des termes de l'interaction négligés, que nous décrirons, permet peut-être d'éliminer l'influence de ce facteur humain sur le résultat. En pratique, la méthode de troncation des états L - S devient la seule utilisable si l'on veut étudier l'influence de l'interaction à deux corps, dans des états de moments cinétiques élevés, sur la fonction d'onde du triton ; la méthode de troncation des états à deux corps conduit en effet, dans ce cas, à un nombre inconsidéré d'états à trois corps à envisager.

II - UN ALGORITHME DE RESOLUTION DU SYSTEME DE FADDEEV

Nous étant fixé pour but l'étude de l'état lié de trois particules, nous avons pour l'instant remplacé le problème de la recherche de la fonction d'onde de cet état par celui de la recherche d'un certain nombre de fonctions $\Psi^{\alpha S T}_{\lambda I L}(x,y)$ (amplitudes de Faddeev) solutions du système intégro différentiel (26). Les fonctions $\Psi^{\alpha S T}_{\lambda I L}(x,y)$ sont définies pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$; elles doivent satisfaire les conditions de régularité $\Psi^{\alpha S T}_{\lambda I L}(x,0) \equiv \Psi^{\alpha S T}_{\lambda I L}(0,y) \equiv 0$ et pratiquement nous remplacerons la condition de carré intégrable par la condition $\Psi^{\alpha S T}_{\lambda I L}(x,y) \equiv 0$ pour x ou (inclusivement) y suffisament grand. Nous allons dans ce chapitre décrire une méthode numérique conduisant effectivement aux solutions $\Psi^{\alpha S T}_{\lambda I L}(x,y)$ pour un potentiel donné.

1 - Notations

La signification physique des différents nombres quantiques des états à trois corps nous sera peu utile dans ce chapitre, aussi nous remplaçons l'ensemble $\{\lambda, I, L, \alpha, S, T\}_j$ par un seul indice. Ainsi, $\Psi^{\alpha S T}_{\lambda I L}(x,y)$ est plus simplement notée par $\Psi_i(x,y)$ et $\langle [e^{\alpha S T}_{\lambda I L} \otimes Y]_{\lambda I L}(\hat{y},\hat{x})]_j \, |V(\vec{x})| \, [e^{\alpha' S' T'} \otimes Y]_{\lambda' I' L'}(\hat{y},\hat{x})]_j \rangle$ par $V_{i\,i'}(x)$.

Nous pouvons maintenant écrire le système (26) sous la forme :

$$\left\{E + \frac{\hbar^2}{M}\left[\Delta - \frac{l_i(l_i+1)}{x^2} - \frac{\lambda_i(\lambda_i+1)}{y^2}\right]\right\}\psi_i(x,y)$$

$$= \sum_j V_{ij}(x)\left[\varphi_j(x,y) + \sum_k \int_{-1}^{1} du\; h_{jk}(x,y,u)\,\psi_k(x',y')\right]$$

(28)

L'amplitude radiale $\frac{\Phi_j(x,y)}{xy}$ de la fonction d'onde sur l'état à trois corps j est donnée par :

$$\Phi_j(x,y) = \psi_j(x,y) + \hat{\psi}_j(x,y) \qquad (29)$$

où $\frac{\hat{\psi}_j(x,y)}{xy}$ est l'amplitude sur l'état j de

$$\sum_k (P^+ + P^-)\,\frac{\psi_k(x,y)}{xy}\left[e^k \otimes Y_{l_k}(\hat{y},\hat{z})\right]_{J} \quad ,$$

c'est-à-dire :

$$\hat{\psi}_j(x,y) = \sum_k \int_{-1}^{1} du\; h_{jk}(x,y,u)\cdot\psi_k(x',y') \quad , \qquad (30)$$

les distances x' et y' étant toujours données en fonction de x, y et u par les relations (25). On a incorporé dans la notation simplifiée $h_{jk}(x, y, u)$ la fonction $h^{L}_{\lambda l\,\lambda' l'}(x, y, u)$ précedemment définie en (24), qui représente l'action de la permutation sur la partie spatiale de l'amplitude de Faddeev, et l'élément de matrice $P_{\alpha\alpha'}$ représentant l'action de cette permutation sur la partie spin-isospin, défini en (21) :

$$h_{jk}(x,y,u) = P_{\alpha_j\alpha_k}\; h^{L_j}_{\lambda_j l_j\,\lambda_k l_k}(x,y,u) \qquad (31)$$

De nombreuses règles de sélection viennent réduire effectivement le nombre de fonctions $h_{jk}(x, y, u)$ impliquées :

$L_j = L_k$;

$\lambda_j + l_j + \lambda_k + l_k$ pair ;

α_j et α_k correspondant aux coefficients non nuls du tableau (22) ;

etc.....

2 - Analogie avec une situation bien connue

La résolution du système (28) peut sembler difficile car il est peu courant d'avoir à résoudre des équations aux dérivées partielles en physique nucléaire. Par contre, si nous négligeons pour l'instant les intégrales - les "termes de source " de Noyes [2] -, de telles équations sont le lot commun d'un grand nombre de domaines, plus techniques que scientifiques. Par exemple, le problème de trouver $\psi(x, y)$ telle que

$$\Delta \psi(x,y) = 0 \text{ dans un certain domaine,}$$

et $$\psi(x,y) = V(x,y) \text{ sur le contour du domaine,}$$

est le plus simple qui puisse survenir en électrostatique lorsqu' on recherche le potentiel électrique crée par une configuration plane de conducteurs en l'absence de charges libres. En présence de charges l'équation à intégrer est :

$$\Delta \psi(x,y) = -\rho(x,y)/\varepsilon_0 \quad \text{dans un certain domaine.}$$

Un exemple d'équation aux valeurs propres impliquant des dérivées partielles apparaît dans l'étude des oscillations d'une membrane dont les bords sont maintenus (peau de tambour) :

$$\Delta \psi(x,y) = -\lambda \psi(x,y) \quad \text{dans la membrane ,}$$

$$\psi(x,y) = 0 \quad \text{sur le contour.}$$

L'universalité des problèmes d'équations aux dérivées partielles, en même temps que l'importance pratique de leur résolution, font que des puissantes méthodes ont été mises au point pour les résoudre, depuis environ un demi siècle, méthodes ayant subi un grand regain d'intérêt avec l'avénement des ordinateurs. Enfin, il se trouve que ces méthodes non seulement peuvent s'étendre à des systèmes d'équations aux dérivées partielles couplées, mais sont de plus applicables aux systèmes du type (28), en dépit des intégrales des termes de source.

Avant de décrire la méthode que nous avons effectivement utilisée pour résoudre le système (28) dans des cas réalistes, nous allons décrire une méthode qui, bien que formellement très simple, s'avère pratiquement vite limitée, son intérêt est d'introduire certaines notions qui serviront par la suite.

3 - Une méthode élémentaire

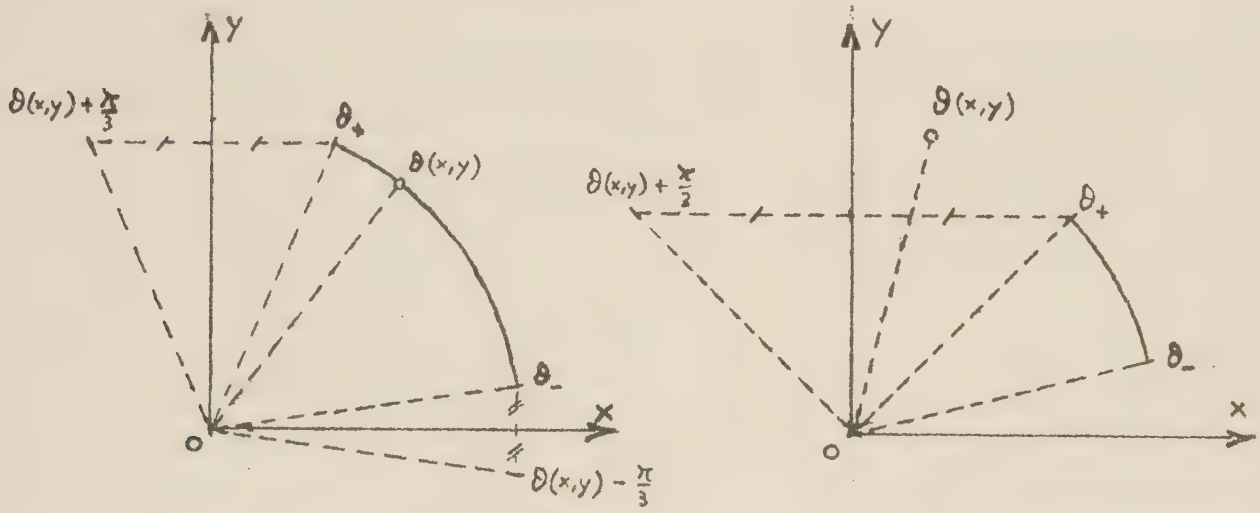
Considérons le système (28). Celui-ci peut aussi bien s'écrire sous la forme :

(32)

où H est un opérateur linéaire, somme d'opérateurs multiplicatifs, (les potentiels d'interaction et les potentiels centrifuges) d'opérateurs de dérivation (le laplacien) et d'opérateurs d'intégration (les termes de source). Le vecteur est composé des différentes amplitudes . Nous pouvons maintenant étudier la résolution de l'équation (32) dans le cas où le système (28) est réduit à une seule équation, sans restreindre la généralité de la méthode. Pour trois bosons en interaction centrale, dans l'état S, le système (28) devient ainsi [2,22] :

(33)

Plaçons nous dans le plan repéré par le système d'axes orthonormés ($\vec{Ox}$, $\vec{Oy}$) et cherchons les valeurs x', y' impliquées au cours de l'intégration sur u correspondant à un point du plan (x, y). Les relations (25) nous montrent que $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$ et nous suggèrent donc une construction géométrique pour obtenir les extrémités de l'arc de cercle d'intégration dans le plan (x,y) :

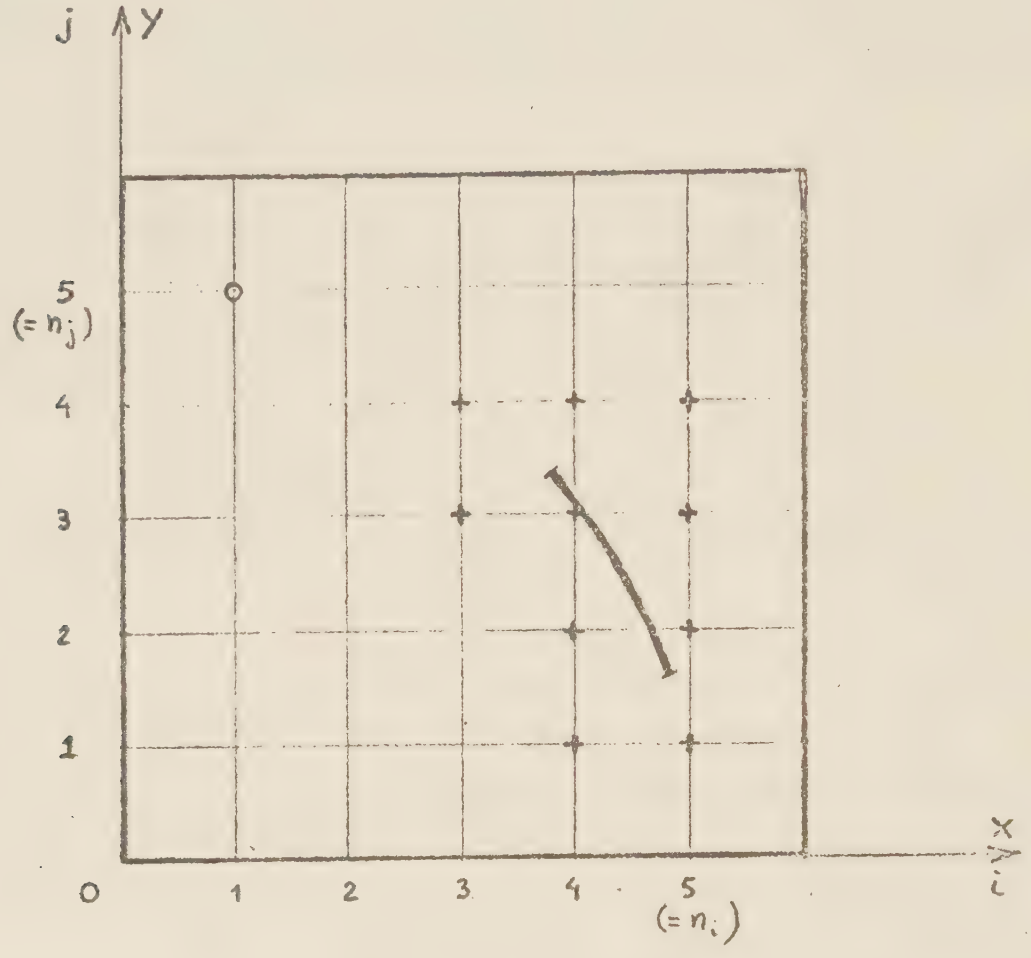


(34)

Le point x, y considéré est représenté par o. Les extrémités de l'arc d'intégration correspondent à des angles polaires ϑ_- et ϑ_+ ϑ_- est obtenu en prenant la valeur absolue de $\vartheta(x,y) - \pi/3$. On procède de même pour ϑ_+ par rapport à l'axe $\vec{oy}$.

Appliquons sur le plan (x, y) une grille carrée, à mailles carrées de côté δ (fig. 35). Nous savons que Ψ (x, y) doit être nulle sur les côtés O x et Oy de cette grille; si d'autre part le côté de cette grille est suffisament grand, la condition de décroissance rapide de $\psi(x,y)$ nous assure que pratiquement $\psi(x,y)$ est nulle sur les deux autres côtés. Recherchons maintenant l'ensemble

discret des nombres $\Psi_{i,j}$ correspondant aux noeuds i j intérieurs à la grille et satisfaisant l'équation aux différences correspondant à (33).



(35)

L'expression du laplacien de $\psi(x, y)$ au noeud (i, j), au moyen des différences finies est :

$$[\Delta\psi]_{i,j} = \frac{1}{\delta^2}\left[\psi(i-1,j) + \psi(i+1,j) + \psi(i,j+1) + \psi(i,j-1) - 4\,\psi(i,j)\right] + O(\delta^2) \qquad (36)$$

Le produit $V(x) \cdot \psi(x, y)$ au même noeud est tout simplement:

$$[V.\psi]_{i,j} = V(i)\ \psi(i,j) \qquad (37)$$

L'intégrale $\int_{-1}^{1} du\ \frac{xy}{x'y'}\ \psi(x',y')$ peut être calculée par une méthode de Gauss-Legendre, faisant ainsi appel à un certain nombre de valeurs de $\psi(x, y)$ prises en des points arbitraires de l'arc d'intégration avec des poids correspondants. Ces points ne coincident généralement pas avec des noeuds de la grille, aussi on y évalue la valeur de la fonction par une interpolation faisant intervenir les quatre noeuds les plus proches :

(38)

$$\psi((i+p)\delta, (j+q)\delta) = (1-p)(1-q)\ \psi(i,j) + p(1-q)\ \psi(i+1,j) + q\ (1-p)\,\psi(i,j+1) + p\,q\ \psi(i+1,j+1) + O(\delta^2) \qquad (39)$$

Ainsi, nous avons une estimation du terme de source correspondant au noeud (i,j) :

$$\left[V(x)\int_{-1}^{1} dx \frac{xy}{x'y'}\,\psi(x',y')\right]_{ij} = V(i)\sum_{i'j'} w(i,j,i',j')\,\psi(i',j') \qquad (40)$$

La somme sur i',j' implique tous les noeuds encadrant l'arc d'intégration (indiqués par + sur la figure (35), pour le cas i = 1 , j = 5). Les poids w (i, j, i', j') sont les résultantsdes poids d'intégration de Gauss-Legendre, des poids d'interpolation et des valeurs de xy/x'y'. L'erreur commise est certainement importante à cause de ces deux approximations successives, mais difficile à évaluer ; nous verrons l'intérêt d'utiliser les coordonnées polaires pour le calcul des termes de source.

Ainsi, nous substituons à l'équation (33) pour $\psi(x, y)$ le système d'équations linéaires suivant pour les quantités

$\psi(i, j)$, ($i = 1, \ldots n_i$; $j = 1, \ldots n_j$) :

$$-\frac{\hbar^2}{MS^2}\psi'(i-1,j) - \frac{\hbar^2}{MS^2}\psi'(i+1,j) - \frac{\hbar^2}{MS^2}\psi(i,j-1) - \frac{\hbar^2}{MS^2}\psi'(i,j+1)$$

$$+\left(4\frac{\hbar^2}{MS^2} + V_i - E\right)\psi(i,j) + V(i)\sum_{i'j'} w(i,j,i',j')\,\psi'(i',j') = 0 \qquad (41)$$

C'est un système de $n_i\, n_j$ équations à $n_i\, n_j$ inconnues, dont nous connaissons tous les coefficients à l'exception de E. Ce système

n'a de solution non nulle que si le déterminant de la matrice de ses coefficients est nul; le procédé de résolution consiste donc à choisir une valeur de E, construire la matrice des coefficients et calculer son déterminant. Avec quelques valeurs du déterminant en fonction de E, on détermine rapidement la valeur de E qui le rend nul et il ne reste plus qu'à résoudre le système linéaire (41) pour obtenir les $\Psi(i, j)$.

Nous avons effectivement utilisé cette méthode, dont la programmation est élémentaire. Les limites en sont toutefois pratiquement rapidement atteintes car elle implique la conservation en mémoire de $(n_i\ n_j)^2$ nombres et le calcul d'un déterminant de rang $n_i\ n_j$. Au delà de $n_i = n_j = 10$, le calcul du déterminant fait intervenir des nombres dépassant les capacités de l'ordinateur alors que la précision du quadrillage est certainement encore insuffisante pour décrire correctement l'amplitude $\Psi(x,y)$ dans un cas réaliste. Aussi pour des nombres de points "actifs" $n_i\ n_j$ plus élevés nous devons nous tourner vers une méthode ne nécessitant pas la mise en mémoire de l'ensemble des coefficients du système linéaire et parvenant à l'énergie E par un processus moins direct que le calcul d'un déterminant.

4 - L'itération inverse

L'équation générale que nous devons résoudre est du type (32):

$$H\,\Psi = E\,\Psi \quad . \tag{42}$$

Nous supposons que :

les vecteurs propres Ψ_i de H constituent un système complet ;

les valeurs propres E_i de H sont réelles. Ces conditions sont réalisées lorsque la matrice de H est symétrique réelle (hermitique).

Choisissons une solution très approximative $\Psi^{(o)}$ de l'équation (42), que nous développons sur les vecteurs propres Ψ_i :

$$\Psi^{(o)} = \sum c_i\,\Psi_i \tag{43}$$

Dans ces conditions, "l'itération inverse" [23] :

$$(H-p)\,\Psi^{(k)} = \Psi^{(k-1)} \tag{44}$$

où p est une approximation de la valeur propre E, conduit à une approximation :

$$\Psi^{(k)} = \sum_i \frac{c_i}{(\epsilon_i - p)^k}\,\Psi_i \tag{45}$$

Ainsi, lorsque k augmente, $\Psi^{(k)}$ s'approche du vecteur propre de H correspondant à la valeur propre E la plus proche de p, car le développement (45) est alors dominé par le terme où figure $1/(E-p)^k$. L'itération inverse est en fait la "méthode de la puissance" appliquée à la matrice $(H-p)^{-1}$ pour en déterminer la plus grande valeur propre. D'autres formules d'itération et leur convergence ont été étudiées dans la référence [24] ; la convergence de l'itération (44) est dite géométrique en ce sens que

$$\Psi^{(k)} - \Psi \sim \varepsilon^k\,\chi \tag{46}$$

où χ est un vecteur orthogonal à Ψ, et $\varepsilon < 1$.

Nous avons donc un algorithme de recherche de fonction propre, (44) ; à chaque itération, connaissant $\Psi^{(k-1)}$, le problème consiste à déterminer $\Psi^{(k)}$, c'est-à-dire résoudre un système linéaire inhomogène. Nous avons remplacé les calculs successifs de déterminant de la première méthode par des résolutions successives de système linéaire, avec un bénéfice peu évident. Fort heureusement, une méthode est à notre disposition, rendant la résolution d'un système linéaire beaucoup plus pratique que le calcul de son déterminant.

5 - La sur - relaxation

Représentons à nouveau le vecteur Ψ par les valeurs de ses composantes aux noeuds d'un réseau du type (35). Ainsi pour un rang N du système (28) (N = nombre d'amplitudes de Faddeev du problème) et une grille de $n_i \times n_j$ points actifs dans le plan x y, le

vecteur Ψ est représenté par un tableau de N x n_i x n_j valeurs et la formule d'itération inverse (44) devient un système d'équations aux différences finies très semblable à (41) mais où figure cette fois ci un second membre $\varphi^{(k-1)}$ et où l'énergie inconnue E est remplacée par le paramètre p ; l'équation aux différences finies n° r, i, j a l'aspect suivant :

$$-\frac{\hbar^2}{MS^2}\left[\Psi_r^{(k)}(i-1,j)+\Psi_r^{(k)}(i+1,j)+\Psi_r^{(k)}(i,j-1)+\Psi_r^{(k)}(i,j+1)-4.\Psi_r^{(k)}(i,j)\right.$$

$$\left.-\frac{l_r(l_r+1)}{i^2}\Psi_r^{(k)}(i,j)-\frac{\lambda_r(\lambda_r+1)}{j^2}\Psi_r^{(k)}(i,j)\right]+V_{r,r}(i)\cdot\Psi_r^{(k)}(i,j)$$

$$+\sum_{s\neq r}V_{r,s}(i)\cdot\Psi_s^{(k)}(i,j)+\sum_{s,t,i',j'}V_{r,s}(i)\cdot w_{s,t}(i,j,i',j')\cdot\Psi_t^{(k)}(i',j') \qquad (47)$$

$$-p\,\Psi_r^{(k)}(i,j)=\Psi_r^{(k-1)}(i,j)$$

dans cette équation, les indices r, s et t sont des numéros d'états à trois corps, les indices i ou i', j ou j' repèrent respectivement des valeurs de x et y ; on a inclu dans les poids $w_{st}(i,j,i',j')$ les fonctions $h_{st}(x,y,u)$ définies en (31). De cette équation, on peut extraire explicitement la valeur de $\Psi_r^{(k)}(i,j)$ en fonction de toutes les autres grandeurs supposées connues ; on obtient ainsi une nouvelle valeur $\bar{\Psi}_r^{(k)}(i,j)$ que l'on substitue à l'ancienne :

$$\Psi_r^{(k)}(i,j) \leftarrow \bar{\Psi}_r^{(k)}(i,j) \qquad (48)$$

On passe ensuite à la composante r + 1, i, j, que l'on calcule de la même façon, en résolvant son équation correspondante, et en utilisant la valeur modifiée de $\Psi_r^{(k)}(i,j)$ (48). Lorsque le rang du système est épuisé (r $\leq$ N), on passe au noeud voi-

sin, e.g. (i, j + 1) et on procède de la même façon. La méthode de relaxation (25) qui ne fait appel qu'à un papier, un crayon et de la patience, consiste après chaque opération (48) à choisir comme noeud suivant celui pour lequel l'équation (47) est la moins bien satisfaite , ceci jusqu'à ce que l'ensemble des équations soient satisfaites avec chacune une erreur inférieure à une certaine limite. La méthode des déplacements successifs (23) , mieux adaptée aux calculateurs automatiques, consiste à balayer systématiquement, dans un ordre immuable et prédeterminé, tous les noeuds i, j du plan puis à recommencer ce balayage, et ainsi de suite jusqu'à satisfaction satisfaisante de toutes les équations (47)

Pratiquement, la convergence des balayages est très améliorée, si on utilise la méthode des sur - relaxations successives (23) qui consiste à prendre comme valeur définitive en un point r, i, j une extrapolation de la solution de l'équation (47) par rapport à l'ancienne valeur :

$$\delta\psi \leftarrow \bar{\psi}_r^{(k)}(i,j) - \psi_r^{(k)}(i,j)$$

$$\psi_r^{(k)}(i,j) \leftarrow \psi_r^{(k)}(i,j) + \omega\delta\psi \qquad (49)$$

où ω est le facteur d'accélération.

La convergence de ces méthodes est assurée lorsque l'équation à résoudre est l'équation de Laplace $\Delta\psi = 0$. Il existe des conditions plus générales de convergence (26) , exprimées sur la matrice de H - p du système linéaire (44) dont nous cherchons la solution $\psi^{(k)}$ par le système d'équations aux différences finies (47). La

condition la plus simple est que la matrice soit symétrique définie positive ; le simple examen de l'équation (47) montre que la matrice du système ne peut être symétrique, à cause des termes de source. Il est impossible de s'assurer que la matrice est définie positive : on peut tout au plus s'efforcer de maximiser les éléments diagonaux

$$\frac{\hbar^2}{M S^2}\left[4 + \frac{l_r(l_r+1)}{i^2} + \frac{\lambda_r(\lambda_r+1)}{j^2}\right] + V_{rr}(i) - p \qquad (50)$$

en choisissant p suffisament petit. Toutefois, éloigner p de E se fait au détriment de la convergence de l'itération inverse (44). Remarquons aussi que la non symétrie de la matrice de H - p introduit un doute sur la satisfaction des hypothèses de convergence de l'itération inverse.

La vitesse de convergence de la méthode des sur-relaxations successives dépend de façon critique de la valeur du facteur d'accélération ω . Cette méthode converge de toute façon plus rapidement que celle des déplacements successifs ($\omega = 1$). Pour des systèmes à matrice symétrique définie positive on peut montrer que ω doit être compris entre un et deux. La détermination automatique de la valeur optimale de ω est un problème délicat [26] et dans le doute, il est préférable de surestimer cette valeur.

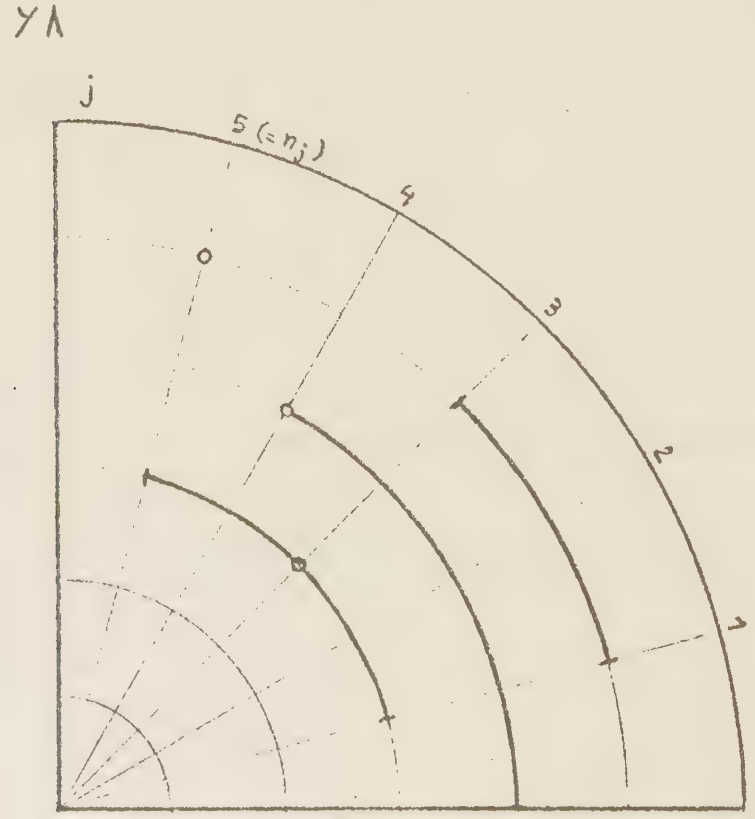
Revenons à l'équation (47) dont la résolution par rapport à $\psi'^{(k)}_r(i,j)$ est l'essence de la méthode. Laissant de côté les potentiels $V_{rs}(i)$ et les poids $w_{st}(i,j,i',j')$, nous voyons que l'efficacité du calcul exige la conservation en mémoire de l'ordinateur des deux tableaux, de même dimension, des nombres $\psi'^{(k)}_r(i,j)$ et $\psi'^{(k-1)}_r(i,j)$ pour $r = 1,\ldots, N$; $i = 1,\ldots,n_i$ $j = 1, \ldots n_j$; soit $2 \times N \times n_i \times n_j$ nombres. Il suffit de comparer ce fait avec les $(N \times n_i \times n_j)^2$ nombres nécessaires dans la méthode

du déterminant pour être frappé par l'avantage des méthodes de relaxation : pouvoir traiter un rang du système N et un nombre de noeuds $n_i \times n_j$ beaucoup plus grands.

Les nombres de $V_{rs}(i)$ indépendants sont restreints par des symétries et des régles de sélection, et sont par conséquent peu élevés. Les poids $w_{rs}(i,j,i',j')$ sont par contre nombreux, leur mise en mémoire poserait des problèmes de capacité et leur calcul à chaque noeud, chaque fois qu'il en est besoin, entraînerait un allongement du temps du processus. Un changement de réseau dans le plan x, y va nous permettre de remédier à ce problème.

6 - Un autre choix de coordonnées

Au lieu de la grille à maille carrée du type (35), considérons le réseau polaire obtenu avec les deux familles de courbes $\rho = cte$ et $\theta = cte$. Nous adopterons une nouvelle frontière, plus adaptée à ce type de réseau ; ainsi le nouveau domaine de définition de la solution est délimité par les droites x = o et y = o et un quart de cercle de rayon ρ_{max} centré en O. Nous prendrons ρ_{max} assez grand pour pouvoir supposer que la solution est nulle sur cette frontière.



(51)

Le choix du pas radial δ_ρ et du nombre n_i est fonction de la valeur de ρ_{max} désirée et de la précision souhaitée. Par contre, le choix du nombre de rayons

$$n_j = 2^k \cdot 3 - 1 \quad (k \text{ entier} \geq 0) \tag{52}$$

correspondant à un pas angulaire

$$\delta_\varphi = \frac{\pi}{2^{k+1} \cdot 3} \tag{53}$$

offre un intérêt particulier : le domaine d'intégration des termes de source correspondant à un noeud du réseau (indiqué par o sur la figure (51)) est limité par des noeuds du réseau ; les noeuds appartenant à ce domaine sont équidistants et en nombre impair. La méthode d'intégration de Simpson est ainsi parfaitement adaptée au calcul des termes de source. Ces propriétés sont la conséquence directe de la construction donnée pour les bornes de l'arc d'intégration (figure (34)).

L'utilisation du réseau polaire apporte quelques complications triviales :

- l'action du laplacien ne s'évalue plus par une équation aux différences finies aussi simple que (36)
- les potentiels V (x) sont mainteant des fonctions des deux variables ρ et φ ; leurs valeurs aux noeuds $V_{r\,s}(i,j)$ sont maintenant caractérisées par quatre indices au lieu de trois en coordonnées cartésiennes ; les tableaux correspondants, à conserver en mémoire, sont plus grands ;
- les méthodes de relaxation convergent moins rapidement.

En pratique, ces inconvénients sont plus que compensés par la concision apportée au calcul des termes de source. On peut trouver en appendice C les détails concernant le calcul des termes de source en coordonnées polaires et l'analogue de l'équation (47) dans ce système.

La convergence des méthodes de relaxation est d'autant meilleure que les mailles du grillage approchent la forme de carrés. L'examen de la figure (51) montre que nous avons intérêt à prendre un pas sur le rayon, δ_ρ, plus petit au voisinage de l'origine. Cet

affinage du pas présente aussi, et surtout, l'avantage de mieux décrire la solution dans la région où ses dérivées secondes risquent d'être importantes du fait des formes de potentiel utilisées. Le changement du pas δ_ρ par un facteur deux à des distances de l'origine choisies, est la méthode que nous avons adoptée et qui présente pratiquement le moins de complications [23].

7 - Les critères d'arrêt

Tout calcul du type itératif nécessite la définition de critères permettant de décider ou non l'arrêt de ce calcul. Sous ce rapport, notre tâche a été considérablement facilitée par l'utilisation de l'ordinateur en mode conversationnel. Prendre une décision est plus simple, et en général plus efficace, que de tenter de programmer celle ci. La prise de décision nécessite néammoins des informations sur l'état du calcul ; ces informations doivent apporter des renseignements sur la convergence des relaxations d'une part, sur la convergence des itérations inverses d'autre part.

En ce qui concerne les relaxations, nous considérons après chaque balayage la plus grande valeur de la correction $\delta\psi$ (équation 49). La vitesse de décroissance de $\delta\psi$ maximal nous permet en outre de juger le choix du facteur d'accélération ω.

La méthode la plus courante pour évaluer une valeur propre correspondant à un supposé vecteur propre consiste à calculer le quotient de Rayleigh. Dans notre cas [23], ceci revient à calculer la correction

$$\frac{\langle \psi | H - p | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi' \rangle} \qquad (54)$$

à ajouter au paramètre p pour obtenir la valeur propre E. Aussi, lorsque nous estimons le système linéaire (44) suffisament bien résolu par les relaxations, nous calculons la quantité que nous appelons "énergie de Rayleigh":

$$E_{R_\alpha}^{(k)} = \frac{\langle \psi'^{(k)} | \psi'^{(k-1)} \rangle}{\langle \psi'^{(k)} | \psi^{(k)} \rangle} + p \qquad (55)$$

Nous avons également trouvé utile de calculer "l'énergie de Ritz" :

$$E_R^{(k)} = \frac{\langle \phi^{(k)} | \phi^{(k-1)} \rangle}{\langle \phi^{(k)} | \phi^{(k)} \rangle} + p \qquad (56)$$

à l'aide de l'approximation $\phi^{(k)}$ de la fonction d'onde du système calculée à l'aide de l'équation (29) et de l'approximation $\psi^{(k)}$ de l'amplitude de Faddeev.
La convergence et la stabilisation de ces deux énergies permettent de décider l'arrêt complet du calcul.

En ce qui nous concerne, l'itération inverse (44) consiste simplement lorsque l'on a déterminé $\psi^{(k)}$ à remplacer $\psi^{(k-1)}$ par la solution $\psi^{(k)}$ normée, et à prendre comme première approximation de $\psi^{(k+1)}$ avant la relaxation, la solution $\psi^{(k)}$ non normée.

8 - L'intendance

Nous avons effectivement programmé l'algorithme que nous venons d'exposer : itérations inverses, sur relaxations successives en coordonnées polaires. Ce programme traite sans difficultés le problème de trois nucléons avec les potentiels réalistes les plus récemment proposés. Les avantages pratiques de cette méthode concernent tout particulièrement :

- la simplicité de la programmation
- la rapidité du calcul ; environ vingt minutes (temps d'unité centrale sur IBM 360-67) pour trouver la solution décrivant l'état lié du triton (avec cinq amplitudes de Faddeev).
- la faible exigence en volume de mémoire de l'ordinateur ; l'étude du triton précédente, avec un nombre de points actif $n_i\, n_j = 1927$, n'exige que 46 500 mots de mémoire pour les divers tableaux nécessaires.

Les problèmes que nous avons résolus ne comportaient jamais plus de six amplitudes de Faddeev ($N = 6$) mais ce nombre n'est certainement pas une limite car nous avons pratiquement constaté que l'encombrement en mémoire et le temps de calcul ne croissent guère plus que linéairement en fonction du rang N du système différentiel

Remarquons enfin que le traitement de potentiels non locaux ne devrait pas poser de problème particulier, puisque la méthode que nous avons décrite s'accomode fort bien de la non localité étendue introduite par les termes de source.

III - BREVE DISGRESSION SUR DES POTENTIELS POUR L'INTERACTION DE DEUX NUCLEONS

Nous sommes maintenant en mesure d'intégrer l'équation de Faddeev pour trois particules liées. Il ne nous reste pour cela qu'à introduire dans les équations (26) une forme explicite du potentiel d'interaction $V(\vec{x})$ de ces particules deux à deux. Dans le cas de nucléons, ce potentiel est malheureusement loin d'être connu de façon unique. C'est pourquoi une brève discussion des différents potentiels que nous avons utilisés suit un rappel des caractéristiques générales de l'interaction nucléon - nucléon.

1 - Caractéristiques d'un potentiel nucléon -nucléon

Le moment magnétique du deuton est pratiquement égal à la somme des moments magnétiques intrinséques du proton et du neutron, indiquant que ces deux particules liées sont dans un état de moment cinétique orbital relatif nul (état S). Le potentiel d'interaction est donc attractif et central ; la valeur de l'énergie de liaison du deuton suggère une profondeur de potentiel de l'ordre de 40 Mev à une distance de l'ordre du Fermi.

Toutefois le deuton possède un moment quadrupolaire électrique, chose impossible s'il est dans un état S, doué de symétrie sphérique. Seul un mélange d'état D de quelques pourcents peut expliquer la présence de ce moment quadrupolaire. Le deuton est donc constitué d'un mélange d'états S et D, qui ne peuvent échanger de l'énergie que par l'intermédiaire d'une interaction non centrale de caractère tensoriel. Le signe du moment indique enfin que cette interaction doit être attractive (en utilisant la définition habituelle de "l'opérateur tensoriel" S_{12}).

Le changement de signe des déphasages de la diffusion nucléon-nucléon dans les états relatifs $^3S_1$ et $^1S_0$ lorsque l'énergie cinétique atteint 250 Mev nous fournit un détail supplémentaire : l'interaction centrale doit être répulsive à courte distance (entre 0 et 0.7 Fm).

On a tout lieu de croire que l'interaction nucléon - nucléon est médiée par l'échange de mésons. A grande distance cette interaction ne peut résulter de l'échange que d'un seul des plus légers de ces mésons. Ces mésons sont les pions, et ce comportement se manifeste donc pour des distances $x \gtrsim 2 \cdot \frac{\hbar}{m_\pi c} \simeq 2.8$ Fm.
Que de telles forces d'échange puissent dériver d'un potentiel est une hypothèse complétement indépendante et purement gratuite ; on en déduit néammoins, dans un but tout heuristique, un potentiel simulateur de l'échange d'un pion :

$$V_{OPEP}(\vec{x}) = \frac{g^2}{12} m_\pi c^2 \left(\frac{m_\pi}{M}\right)^2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \left[\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 + S_{12}\left(1 + \frac{3}{\mu x} + \frac{3}{(\mu x)^2}\right)\right] \frac{e^{-\mu x}}{\mu x} \qquad (57)$$

avec $\mu = m_\pi c / \hbar = 0.7$ Fm^{-1}.
Lorsque le moment cinétique orbital relatif des deux nucléons augmente leur rapprochement est peu probable ; on pense donc que l'interaction est partout dominée par $V_{OPEP}(\vec{x})$ dès que ce moment cinétique $L \gtrsim 4$.

A plus courte distance, de nombreux mésons plus lourds sont candidats à l'échange ainsi que les pions non solitaires. Les informations expérimentales sur les constantes de couplage de ces mésons manquent et en l'état actuel ces échanges ne prédisent pas l'existence du coeur répulsif[27].

La localité du potentiel d'interaction est un inépuisable sujet de discussion. Un certain type de non localité est nécessaire ne serait-ce qu'à cause de la présence d'un opérateur d'échange spatial de Majorana. D'autres termes, dépendant du moment cinétique orbital relatif, sont venus s'ajouter à l'interaction, qui ont peu à peu relâché le caractère de localité initial. Cette localité "au sens faible" ne repose elle même que sur la coutume, sa valeur parfois

heuristique, et tout de même, sur l'existence de $V_{OPEP}(\vec{x})$ (28) quoique, nous l'avons vu, la notion même de potentiel d'interaction nucléon-nucléon, soit discutable.

Enfin, l'interaction nucléon nucléon est, à une très bonne approximation, indépendante de la charge de ces nucléons.

2 - Un potentiel dur : celui de Reid à coeur mou !

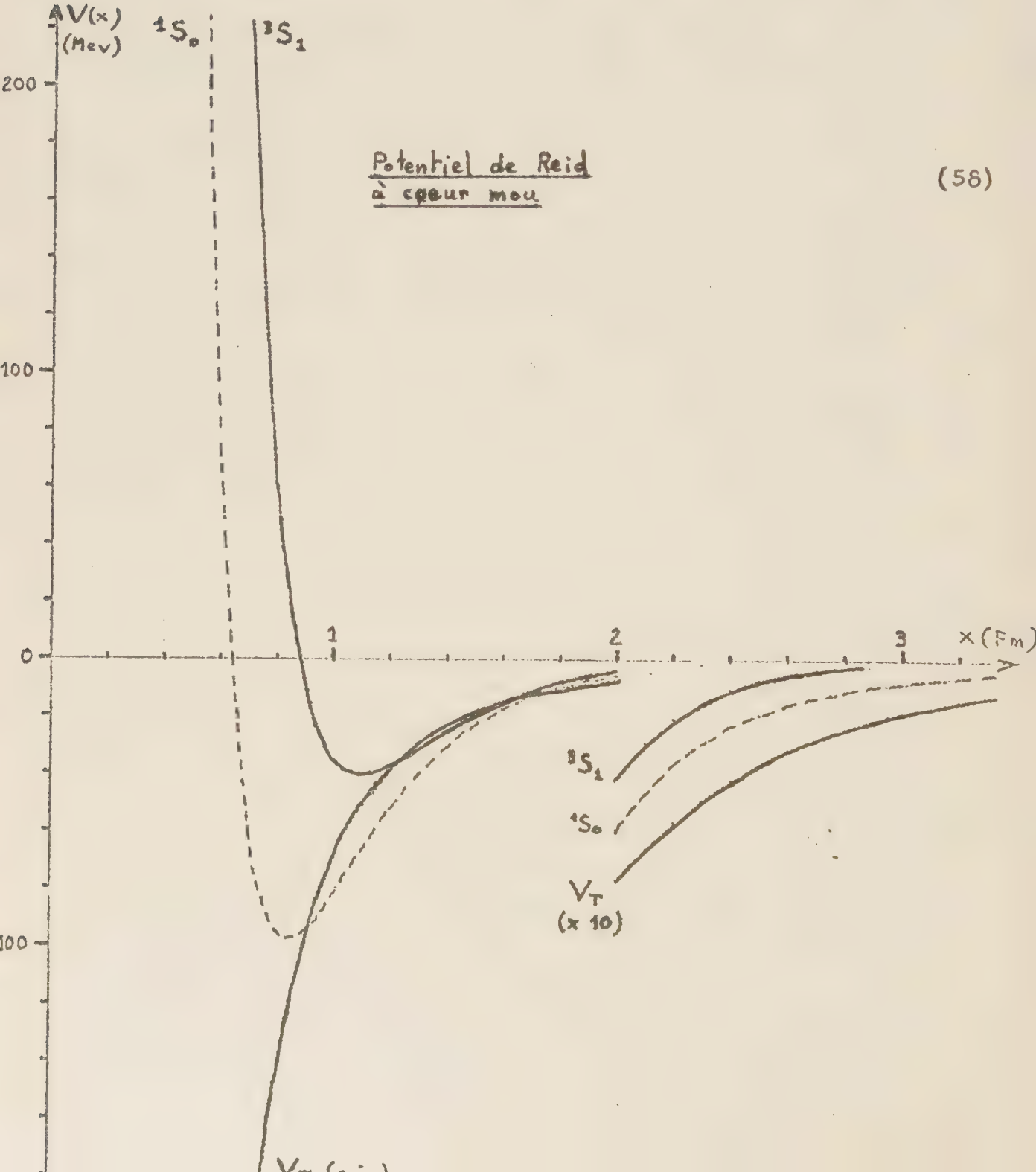
Le potentiel dit de "Reid à coeur mou" (RSC) est le premier que nous ayons utilisé pour étudier l'état lié de trois nucléons. C'était lorsque nous avons commencé cette étude, le dernier potentiel réaliste publié [29], tenant compte des analyses en déphasage les plus récentes. Ce potentiel est ajusté sur les déphasages expérimentaux de la diffusion nucléon - nucléon dans les états $J \leq 2$. Le potentiel réaliste précedemment le plus utilisé était celui de Hamada et Johnston; celui-ci présente l'inconvénient d'avoir un coeur infiniment dur ; d'autre part (contrairement au RSC) sa prédiction concernant l'énergie du deuton s'écarte de 3 % de la valeur expérimentale [29,30].

Reid a défini des potentiels distincts, pour chaque état relatif de deux nucléons, afin d'étudier indépendamment leurs variations. Il cherche ainsi un potentiel central différent pour chaque état non couplé ($L = J$) ; pour l'ensemble des états couplés, il cherche un potentiel central, un potentiel tenseur et enfin un potentiel de type $\vec{L} \cdot \vec{S}$, ceci pour les états pairs et impairs respectivement. Pour $J > 2$, la forme "OPEP" est supposée.

La partie a longue portée du potentiel RSC est $V_{OPEP}(\vec{x})$ dans tous les états. A distance moyenne, les effets d'échanges de bosons sont phénoménologiquement simulés par une somme de potentiels de Yukawa du type $e^{-n\mu x}/\mu x$ (n entier).

Le coeur répulsif, prétendu mou (au sens où la fonction d'onde n'est pas nulle en son sein), quoique il soit déjà trop dur pour se contenter d'un traitement perturbatif, est représenté par des potentiels de Yukawa à courte portée.

La figure (58) montre les formes radiales du potentiel RSC pour la partie centrale dans le sous espace triplet pair (soit le potentiel dans l'état $^3S_1$), la partie tensorielle dans ce même sous espace (interaction des états $^3S_1$ et $^3D_1$) et le potentiel dans l'état ^1So.



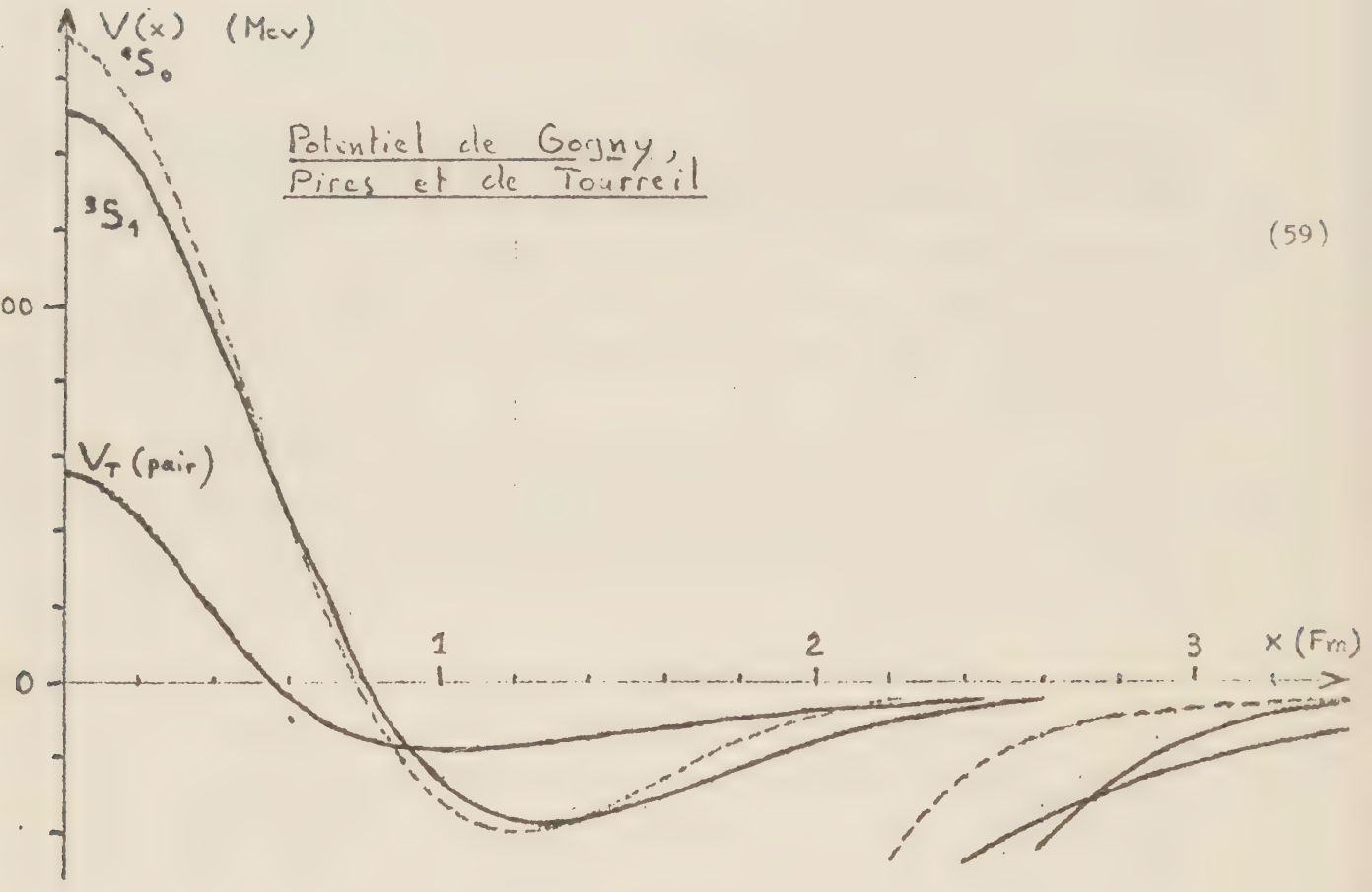
La caractéristique de ce potentiel est d'avoir une contribution tensorielle fortement attractive dans le sous espace triplet pair, ce qui lui permet de lier le deuton avec l'énergie correcte, en dépit de la faible attraction du potentiel dans l'état $^3S_1$. Cette importance se révèle aussi dans la probabilité d'état D prédite pour le deuton (6.47%).

Notre choix du potentiel RSC a été fait indépendamment pour différents groupes pour calculer les caractéristiques de l'état lié de trois nucléons, situation qui nous a permis de fructueuses comparaisons.

3 - Un potentiel gaussien

Le potentiel de Gogny, Pires et de Tourreil (GPD) [31] était une tentative encourageante pour construire un potentiel nucléon -nucléon local, à coeur répulsif très mou (comparé par exemple au potentiel RSC). Nous avons utilisé ce potentiel comme alternative (à l'époque) au potentiel RSC.

Outre les observables du deuton et les caractéristiques de la diffusion nucléon-nucléon, le potentiel GPD a été astreint à reproduire certaines propriétés des noyaux dans l'approximation Hartree Fock, et à prédire la saturation dans la matière nucléaire. Le potentiel GPD contient un terme de plus que le potentiel RSC, dépendant quadratiquement du moment cinétique orbital L. Pour faciliter le calcul de type Hartree - Fock, les formes radiales choisies sont des sommes de gaussiennes ; la décroissance à longue portée est ainsi certainement rapide et éloignée de la forme de la contribution OPEP.



Potentiel de Gogny, Pires et de Tourreil

(59)

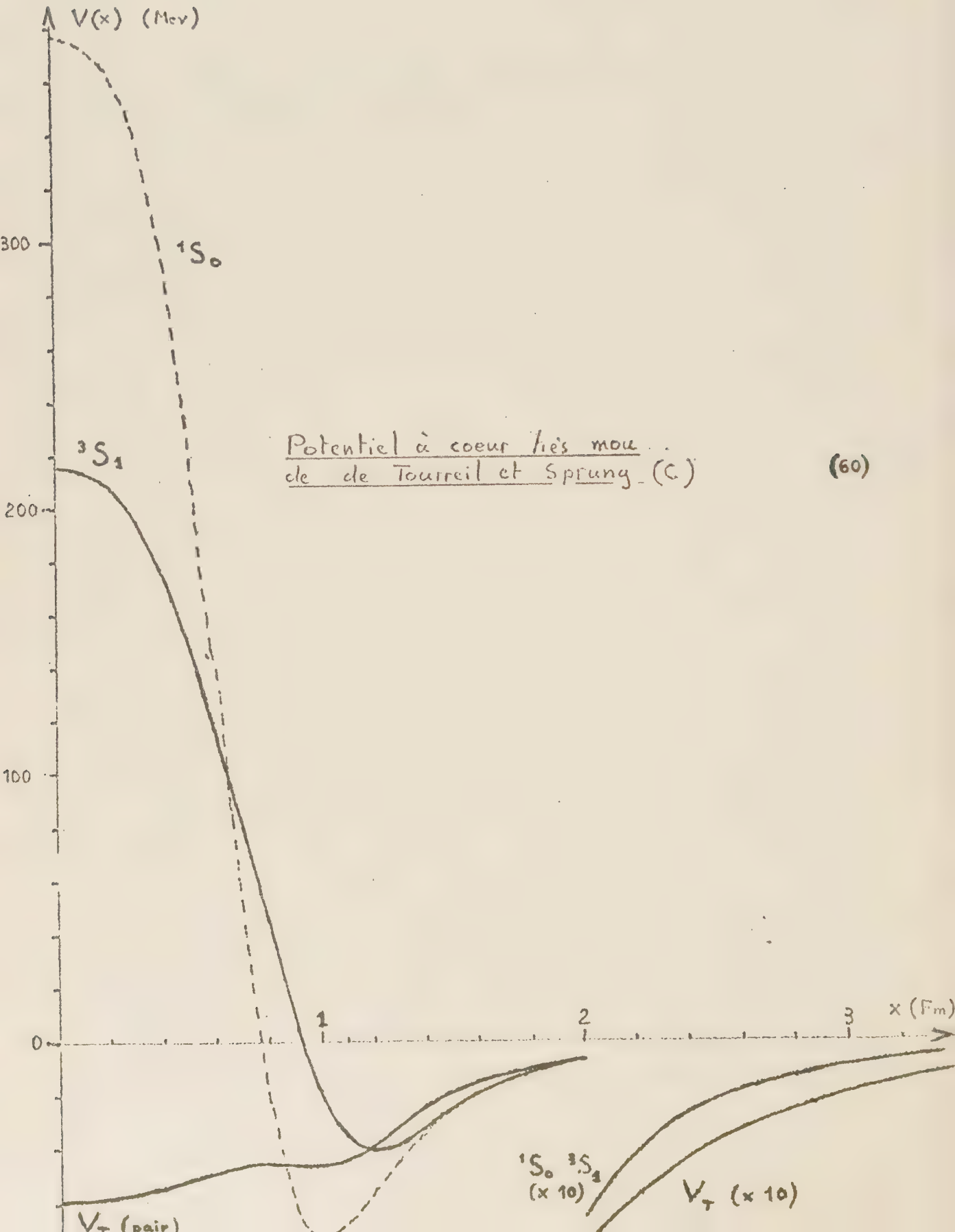
Ce potentiel a montré la possibilité de prédire les déphasages de la diffusion nucléon-nucléon, avec un potentiel relativement doux, sans abandonner la localité au sens faible. Toutefois, dans ce potentiel, le deuton est surlié d'environ 20 % et la probabilité d'état D prédite est de 3,8 % . La surliure du deuton est sans doute due à l'étendue de la zone attractive à moyenne portée dans l'état ^3S. La faiblesse, relativement au potentiel RSC, du mélange d'état D n'est pas surprenante si on compare les intensités du potentiel tenseur dans les états pairs sur les figures (58) et (59).

4 - Un potentiel très mou

Le potentiel à coeur très mou (SSC) de de Tourreil et Sprung [32] est le résultat de recherches élaborées à partir des mêmes motivations que pour le GPD. L'originalité de ce potentiel, par rapport au GPD est d'avoir la forme OPEP à longue portée (comme pour le RSC) et d'avoir à moyenne portée une forme de Yukawa représentant l'échange d'un boson dont la masse est ajustée. Le tout est régularisé à courte portée par une forme de Gauss (contrairement au RSC). La contrainte de reproduction des rayons des noyaux sphériques étant abandonnée, les quantités observables dans le système de deux nucléons sont beaucoup mieux reproduites. En plus du terme spin-orbite $\vec{L}.\vec{S}$ utilisé dans le RSC, figurent une dépendance quadratique du type $\vec{L}^2$ ainsi qu'un terme de couplage de type tensoriel Q entre spins et moment cinétique orbital $\vec{L}$.

Procédant à une recherche des formes radiales ci-dessus dans chaque sous espace de bons spin et isospin pour la paire, de Tourreil et Sprung trouvent finalement trois ensembles de solutions, qualifiées de A, B, et C ; A et B diffèrent surtout par le potentiel central dans le sous espace triplet pair (^3S) ; B et C diffèrent par leur partie non centrale dans le même sous espace. La solution C est préférée par ses auteurs, sur tous les critères qu'ils se sont fixés.

Hormis leur coeur très mou , les potentiels SSC se distinguent du RSC par leur comportement suivant les états à deux corps. Ainsi pour la solution C, figure (60), on constate immédiatement le rapprochement des potentiels centraux $^3S_1$ et ^1S_o, par rapport à la situation dans le RSC; ^1S_o est beaucoup moins attractive. Aux alentours de 1 Fm, l'interaction tenseur est également beaucoup plus faible que pour le RSC. Ceci se traduit sur la probabilité d'état D dans le deuton qui n'est que de 5,5 % et provient en fait de la contribution attractive du potentiel L S dans l'état $^3D_1$; ces différences de comportements expliquent la prédiction de



Potentiel à coeur liès mou de de Tourreil et Sprung (C) (60)

l'énergie du deuton, aussi bonne qu'avec le RSC.

En conclusion, le potentiel SSC reproduit les résultats expérimentaux aussi ou bien, ou mieux que les autres potentiels malgré l'exceptionnelle mollesse de son coeur, et d'autre part, la répartition de ses différentes contributions est très différente de celle du potentiel de Reid à coeur mou.

IV - QUELQUES RESULTATS

Les équations de Faddeev dans l'espace de configuration, qui ont été décrites dans le chapitre I, lorsqu'elles sont accompagnées des conditions asymptotiques sur leur solution, fournissent une description exacte d'un système de trois particules. Nous avons décrit dans le chapitre II le principe d'une méthode permettant la résolution numérique de ces équations, et nos premiers essais de résolution effective nous ont immédiatement montré que cette méthode était pratiquement utilisable, tout au moins pour la résolution du modèle de trois bosons liés dans l'état de moment cinétique orbital zéro [22]. Par la suite, il s'est avéré que la même méthode convenait au traitement réaliste du problème de l'état lié de trois nucléons. La plupart des résultats physiques que nous avons obtenus ont été publiés par ailleurs [15,16,20] et nous allons les rappeler brièvement en y adjoignant ce qui n'a pas été publié.

1 - Les conditions d'obtention

Tous les résultats que nous allons donner ont été obtenus numériquement dans les mêmes conditions. En utilisant un grillage polaire tel que décrit dans le chapitre II, nous considérons : $n_j = 47$ valeurs pour ϑ et $n_i = 41$ valeurs pour ρ. Le pas sur le rayon, au voisinage de l'origine est $\delta_\rho = 0.226$ Fm ; ce pas est doublé au delà de $i = 16$ ($\rho \simeq 3.6$ Fm), puis doublé de nouveau au delà de $i = 28$ ($\rho \simeq 9.$Fm) ; ainsi, la frontière du domaine d'intégration est à $\rho_{max} = 21.7$ Fm (correspondant à $i = n_i + 1$).

Nous avons adopté la valeur de - 30 Mev comme approximation p de la valeur de l'énergie totale, à titre de compromis entre

la convergence des itérations inverses et la convergence des relaxations. Le facteur d'accélération ω optimal se situe généralement entre 1,8 et 1.9 ; vers la fin du calcul, il peut être souhaitable d'utiliser la valeur $\omega = 1$ afin de lisser les petites oscillations qui ont pu être induites dans la solution [23]. L'approximation de départ pour le tout premier problème que nous avons résolu était constituée par l'unité sur tous les noeuds du réseau, et bien entendu zéro sur le contour. La solution d'un problème constitue ensuite un bon départ pour tout autre problème.

La détermination de la précision de la solution obtenue est un problème beaucoup plus long que celui de la détermination de cette solution elle-même. Les erreurs introduites par le remplacement du système intégro différentiel (26) par le système linéaire (47) dépendent des pas δ_r et δ_ρ et du rayon de la frontière ρ_{max}. L'étude de la variation de ces erreurs sur un cas réaliste est longue et fastidieuse.
En tout état de cause, d'après nos calculs sur le modèle de trois bosons, nous estimons que l'incertitude sur l'énergie de liaison de trois nucléons est probablement de l'ordre de 100 keV.

2- Comparaison des méthodes de calcul :

Notre première étude a consisté à vérifier que notre méthode était effectivement utilisable pour résoudre le problème le plus simplement réaliste, à savoir le triton décrit par les amplitudes de Faddeev n° 1, 2 et 3 du tableau (27), lié par le potentiel de Reid à coeur mou (RSC) [29]. L'interaction à deux corps intervient dans les état relatifs $^1S_0$, $^3S_1$ et $^3D_1$; l'interaction tensorielle dans l'espace des états pairs couple les états $^3S_1$ et $^3D_1$. Il se trouve qu'à la même époque le même problème, à savoir la résolution des équations de Faddeev pour les trois ampli-

tudes ci-dessus avec l'interaction RSC dans les états J 1, a été résolu de trois façons fondamentalement différentes. Harper, Kim et Tubis, ont résolu les équations de Faddeev dans l'espace des impulsions p et q [19] en utilisant la méthode de Malfliet et Tjon [33] Benayoun et Gignoux ont résolu les mêmes équations dans l'espace mixte x et q [14], et enfin nous avons résolu ces équations complétement dans l'espace de configuration x et y [15]. Les résultats comparés de ces calculs sont les suivants :

	Energie (Mev)	PS'	PD	$r_{ch}(^2H)$	$r_{ch}(^3He)$	position du minimum de $\lvert F_{ch}(q^2)\rvert$ (Fm^{-2})
HKT[19,34]	- 6,4	1.9	7.8	?	?	?
BG [14]	- 6.6	1.9	7.7	1,75	1.97	15.5
nous[15]	- 6.4	2.0	7.8	1.75	2.00	15.2

Dans ce tableau, selon la coutume, PS' et PD désignent les probabilités totales de L = 0 avec symétrie mixte et L = 2 dans la fonction d'onde du système. On ne peut que constater le bon accord entre les solutions des mêmes équations dans trois espaces différents !.

Dans le but d'améliorer notre connaissance de la structure du triton réel, nous avons étudié l'influence des amplitudes de Faddeev de moment cinétique élevé. Le calcul que nous avons fait avec les six composantes du tableau (27) et l'interaction RSC a définitivement montré que les équations de Faddeev sont pratiquement utilisables pour résoudre un problème réaliste dans l'espace de configuration. L'influence de ces composantes supplémentaires, = 2, est nulle sur les probabilités des différents états de symétrie ; par contre, l'énergie et le facteur de forme électrique sont modifiés de façon assez substantielle pour que la description par les trois amplitudes habituelles S, E et S' (n° 1, 2 et 3, tableau (27))

apparaisse insuffisante si l'on désire faire une étude fiable de ces quantités .

	Energie	PS'	PD	$r_{ch}(^3H)$	$r_{ch}(^3He)$	minimum de $\lvert F_{ch}(q^2)\rvert$
amplitudes n°1,...6 tableau(27)	- 6.64	1.9	7.9	1.72	1.97	14.5

(62)

En conclusion de cette étude préliminaire, le choix des amplitudes de Faddeev semble revêtir une certaine importance. Une façon de lever l'arbitraire dans le choix de ces amplitudes est d'adopter le procédé de Harper et al. [17] décrit dans le chapitre I, pour tronquer le développement de l'amplitude de Faddeev (16).

3 - Comparaison des choix de troncations

Nous avons donc cherché l'énergie et la fonction d'onde du triton par notre méthode, en partant de la même hypothèse que Harper et al. [19], à savoir, interaction RSC seulement dans les états pairs J 1, afin de permettre la comparaison. Comme nous l'avons vu au chapitre 1, lorsque l'interaction est limitée aux états ^1S_o, $^3S_1$, $^3D_1$ et $^3S_1 - ^3D_1$, on peut résoudre exactement le problème à trois corps car le développement analogue de (16), en base j - J au cours des permutations P^+ et P^- est bien moins simple que celui des composantes L - S, aussi nous nous servons en fait de toutes les propriétés de permutation dans la base L - S et du passage entre les bases L - S et j - J pour établir le système différentiel reliant les cinq amplitudes du tableau (28). Nos résultats pour l'énergie et les probabilités, comparés à ceux de Harper et al., sont :

	Energie	P_S	P_D
HKT [19]	- 6.7	1.7	8.6
nous [20]	- 7.0	1.8	9.0

(63)

Nous constatons l'accord qualitatif des deux groupes de résultats, et avons ainsi une idée de la précision des solutions puisque le problème mathématique posé au départ est le même dans les deux cas.

En ce qui concerne le choix de la méthode de troncation du développement (16), il nous faut comparer les résultats du tableau (63) (base j - J) et ceux des tableaux (61) et (62) (base L - S). Pour plus de consistance, il est préférable de ne comparer que des résultats correspondant à la même méthode de résolution. Il apparait immédiatement sur les résultats du tableau (63) que le procédé de Kim [17,18] (traitement exact de l'interaction effective pour J 1) conduit à une énergie de triton plus basse (donc plus proche de la valeur expérimentale de - 8.5 Mev), tout au moins dans le cas de l'interaction de Reid à coeur mou. Le procédé de troncation donnant l'énergie la plus basse peut sembler préférable car notre méthode n'est pas sans rappeler une méthode variationelle, où la recherche se ferait non pas sur la fonction d'onde mais sur l'amplitude de Faddeev et les paramètres seraient les N n_i n_j valeurs prises par les N composantes aux n_i n_j noeuds du réseau. Toutefois, cet abaissement relatif de l'énergie pourrait être dû au fait que les interactions dans les

états $^1D_2$, $^3D_2$ et $^3D_3$, prises en compte dans le calcul du tableau (62), seraient répulsives : tel n'est sans doute pas le cas au vue des formes radiales de ces interactions [29] ; nous verrons d'autre part que l'on peut estimer ces contributions par un calcul de type pertrubatif.

Nous avons donc adopté le procédé de Kim [18] pour la suite de cette étude, c'est-à-dire : résolution exacte des équations de Faddeev pour une interaction effective dans les états à deux corps ^1S_o, $^3S_1$ et $^3D_1$. Bien entendu, une étude directe de l'influence des autres termes de l'interaction réaliste sur la fonction d'onde, n'est pratiquement envisageable qu'en utilisant la troncation dans la base L - S [21]

4 - Trois nucléons et des potentiels

Disposant d'une méthode efficace pour la résolution des équations de Faddeev nous avons pu nous livrer à une étude comparée des observables du triton et de l'Helium 3 pour les différents potentiels décrits dans le chapitre précédent. Nous présentons nos résultats, pour chaque type d'observable, en les comparant éventuellement aux résultats indépendamment obtenus par d'autres auteurs

5 - L'énergie du triton

L'interaction de Reid à coeur mou tronquée aux états pairs $J \leqslant 1$ a été utilisée indépendamment par différents auteurs dans le problème du tri-nucléon, avec les résultats suivants :

	Energie	Ps'	P_D	P_p
Jackson [35]	- 5.0	0	8	0
Van Wageningen [36]	- 6.6 $\pm$ 0.2	?	?	?
Harper [19]	-6.7	1.7	8.6	?
nous [20]	-7.0	1.8	8.9	0.08
expérience	-8.48	?	?	?

(64)

Le procédé utilisé par Jackson est de type variationnel, sur une base d'oscillateurs harmoniques ; Wageningen diagonalise directement l'hamiltonien par la méthode des harmoniques hypersphériques ; les résultats donnés par ces auteurs, sont des extrapolations de résultats obtenus sur les bases tronquées. Harper et al. résolvent les équations de Faddeev dans l'espace des quantités de mouvement ; nous résolvons ces équations dans l'espace de configuration. Mis à part le résultat de Jackson qui, pour ce problème particulier, était obtenu avec des hypothèses par trop rudimentaires [37] on constate un regroupement qualitatif des résultats tout au moins par rapport à la valeur expérimentale !

Nous avons fait le même type de calcul avec les trois interactions S S C (A, B et C) de de Tourreil et Sprung tronquées aux états pairs $J \leqslant 1$ avec pour résultats [20] :

	Energie	$P_{3'}$	P_D	P_P
SSC (A)	- 7.64	1.5	6.4	0.04
SSC (B)	- 7.71	1.4	6.1	0.04
SSC (C)	-7.46	1.4	7.8	0.06

(65)

Aucun calcul analogue n'a été fait pour l'instant , aussi nous manquons de point de comparaison. Par rapport à nos résultats correspondants pour l'interaction RSC, tableau (64), on constate que les potentiels SSC lient plus le triton, bien qu'ils lient le deuton avec la même énergie. Le triton étant plus lié que le deuton, la décroissance de sa fonction d'onde est plus rapide et deux nucléons seront en général plus proches dans le triton que dans le deuton (nous le vérifierons sur les corrélations) ; ainsi,

l'énergie du triton est sensible à la partie à courte portée de l'interaction. D'autre part, la répartition des contributions de l'interaction nucléon-nucléon dans les différents états à deux corps varie sensiblement d'un potentiel à l'autre. Nous avons calculé (20) ces différentes contributions à l'énergie potentielle de nos solutions pour le triton :

Interaction \ Etat à 2 corps	$^1S_0$	$^3S_1$	$^3S_1 - {}^3D_1$	$^3D_1$	Total = énergie potentielle du triton (Mev)
RSC	-13.03	-0.38	-50.95	8.24	-50.95
SSC (A)	-11.43	-7.23	-31.46	4.28	-45.83 (66)
SSC (B)	-11.70	-9.78	-24.72	2.60	-43.60
SSC (C)	-11.30	-7.74	-27.11	0.53	-45.62

La valeur absolue de l'énergie potentielle, et donc l'énergie cinétique totale, sont plus élevées pour l'interaction de Reid car la forme plus tourmentée de celle-ci se répercute sur la fonction d'onde, ce qui se traduit par une augmentation de la valeur moyenne du carré de la dérivée de celle-ci (énergie cinétique). L'interaction RSC dans l'état $^3S_1$ à une faible contribution, sans doute parce que la différence entre les interactions $^3S_1$ et $^1S_0$ est très marquée dans le RSC (figure 58) ; l'état à trois corps de symétrie mixte S' est couplé à l'état S par cette différence, aussi la probabilité $P_{S'}$ est relativement plus importante pour la solution avec le RSC. L'énergie potentielle du triton dans l'interaction RSC est dominée par la contribution tensorielle paire (interaction $^3S_1 - {}^3D_1$), tandis que la contribution de l'interaction dans l'état $^3D_1$ est fortement répulsive, toujours par comparaison avec la situation pour les interactions SSC. La probabilité P_D élevée dans le triton RSC (tableau (64)) est donc due uniquement à l'interaction tensorielle, plutôt qu'à une contribution attractive (ou moins répulsive) de l'interaction $^3D_1$.

Le terme tensoriel pair des interactions SSC est toujours moins important en particulier pour les potentiels B et C auxquels il est commun : ceci est évident sur les figures (58) et (60) à des distances inférieures à 1.2 Fm.
C'est la raison pour laquelle le moment quadrupolaire du deuton prédit par les interactions SSC (A et B) est inférieur à celui prédit par RSC, ainsi d'ailleurs qu'à la valeur expérimentale [32].

Par contre, le moment quadrupolaire est prédit correctement par le potentiel SSC (C) (préféré de ses auteurs) grâce à l'importance des termes $\vec{L}.\vec{S}$ et Q (voir figures 1c et 1b, réf [32] dont la contribution dans l'état $^3D_1$ se trouve être attractive [3] :

$$V_{^3D_1}(x) = V_C(x) - 2\,V_T(x) + 6\,V_{L^2}(x) - 3\,V_{LS}(x) + 21\,V_Q(x) \qquad (67)$$

On constate bien, sur le tableau (66), que la contribution $^3D_1$ à l'énergie potentielle du triton, la moins répulsive, est celle du potentiel SSC (C). Ceci se traduit immédiatement par une élévation de la probabilité d'état D dans le triton (tableau (65)).

En conclusion, ces premiers résultats sur le triton font ressortir l'importance de la composante tensorielle de l'interaction de Reid à coeur mou. Il serait certainement irréaliste de vouloir déterminer une fonction d'onde du triton avec le potentiel RSC sans inclure cette composante. De plus, les conclusions de de Tourreil et Sprung se trouvent corroborées : l'ajustement des observables peut être aussi bon (et même, pour l'énergie du triton, moins mauvais) pour un potentiel à coeur très mou que pour un potentiel à coeur plus répulsif, du type RSC.

6 - .... et le reste

Les solutions précédentes étant obtenues et supposées ma-

témathiquement exactes pour le problème à résoudre, on peut se demander quelle est l'influence de la troncation du développement (16) pour l'amplitude de Faddeev ou de façon équivalente, quelle pourrait être l'importance des contributions de l'interaction dans les états à deux corps négligés.

L'amplitude de Faddeev, et donc la fonction d'onde, obtenues ci-dessus sont exactes pour les interactions limitées aux états pairs $J \leq 1$. Mais l'action des opérateurs de permutation peut induire dans la fonction d'onde des états à deux corps qui ne figurent pas dans l'amplitude de Faddeev ; ceci peut se voir sur les expressions (29), (30) et (31) où l'indice j peut prendre une infinité de valeurs, quand bien même l'indice k est limité à N le nombre d'amplitudes de Faddeev . L'interaction réaliste V (x) a des éléments de matrice non nuls entre ces états induits dans la fonction d'onde. Faisons la décomposition :

$$V(\vec{x}) = V^{o}(\vec{x}) + V^{1}(\vec{x}) \tag{68}$$

avec :

$$V^{o}(\vec{x}) = V_{^1S_o}(x) + V_{^3S_1}(x) + V_{^3D_1}(x) + V_{^3S\ ^3D}(x) \tag{69}$$

Alors, en utilisant les notations définies au début du chapitre II, la quantité

$$U^{o} = 3 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle \frac{\Phi_i(x,y)}{xy} \middle| V^{o}_{ij}(x) \middle| \frac{\Phi_j(x,y)}{xy} \right\rangle \tag{70}$$

est l'énergie potentielle de notre solution, déjà calculée dans le paragraphe précédent , tandis que

$$U^{1} = 3 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle \frac{\Phi_i(x,y)}{xy} \middle| V^{1}_{ij}(x) \middle| \frac{\Phi_j(x,y)}{xy} \right\rangle \tag{71}$$

est précisément la contribution de $V^1(x)$ à l'énergie totale, calculée au premier ordre des perturbations.

Les amplitudes $\Phi_i(x, y)$ de la fonction d'onde étant déterminées en même temps que les amplitudes de Faddeev $\Psi_j(x,y)$ (équation (29)), il est facile de calculer au premier ordre la contribution des termes de l'interaction à deux corps négligés. Nous trouvons :

Interaction	Energie totale non perturbée (Mev)	Energie potentielle U^o (Mev)	Perturbation U (keV)	Energie totale perturbé (Mev)
RSC	-7.0	-50.95	-180	-7.1
SSC (A)	-7.64	-45.83	65	-7.58
SSC (B)	-7.71	-43.60	110	-7.60
SSC (C)	-7.46	-45.62	123	-7.34

En pratique, dans l'expression (71), nous n'effectuons pas les sommations sur i et j jusqu'à l'infini, car, nous le verrons ci-dessous, les contributions de ces états décroissent rapidement. Aussi, nous n'avons inclus dans la perturbation U^1 du tableau (72) que les contributions des interactions dans les états : $^1P_1$, $^3P_{012}$, $^1D_2$, $^3D_{2\ 3}$, $^3F_2$ (dans le doute, nous avons supposé l'interaction RSC nulle dans l'état $^3D_3$(29) ; une erreur numérique dans la référence [20] a entraîné une valeur erronée pour la perturbation U^1 de l'interaction RSC de - 270 keV ; une différence de cet ordre sur une correction n'affecte pas les conclusions générales).

Dans le tableau (73), nous donnons le détail des contribu-

tions supérieures à 10 keV à l'énergie de perturbation U^1 ; il ne faut pas oublier que dans les expressions (70) et (71), les éléments de matrices non diagonaux contribuent deux fois.

i				i'				$3 < \underset{xy}{\phi_i(x,y)} \mid V^1_{ii'}(x) \mid \underset{xy}{\phi_{i'}(x,y)} >$ (keV)			
λ	l	L	α S T ($T = 1/2$)	λ' ($= λ$)	l'	L'	α' S' T ($T = 1/2$)	RSC	SSC (A)	SSC (B)	SSC (C)
2	2	2	- 3/2	2	2	2	- 3/2	-35	-23	-21	-25
2	2	1	- 3/2	2	2	1	- 1/2	9	7	5	7
				2	2	1	-3/2	-20	- 8	- 8	- 9
2	2	0	A 1/2	2	2	2	-3/2	29	24	18	21
				2	2	1	-1/2	- 2	- 6	- 3	- 5
				2	2	1	-3/2	- 2	- 6	- 3	- 5
				2	2	0	A1/2	-186	-84	-70	-60
1	1	0	+ 1/2	1	1	0	+1/2	8	17	15	14
1	1	2	+ 3/2	1	1	0	+1/2	- 6	29	36	39
				1	1	2	+3/2	127	150	162	183
1	3	2	+ 3/2	1	1	2	+3/2	15	2	2	2
				1	3	2	+3/2	21	10	6	6
3	1	2	+ 3/2	3	1	2	+3/2	-210	-135	-116	-157
1	1	1	+ 1/2	1	1	2	+3/2	- 77	- 3	- 2	- 4
				1	1	1	+1/2	42	9	6	12
1	1	1	+ 3/2	1	1	2	+3/2	77	3	2	4
				1	1	1	+1/2	-13	3	3	5
				1	1	1	+3/2	7	9	8	15

(73)

On constate sur le tableau (73) que les comportements des trois potentiels SSC sont analogues. L'énergie perturbative totale est attractive pour le RSC et répulsive pour les SSC (tableau 72) ; le tableau (73) nous montre que cette différence a son origine dans :

(i) la contribution dans l'état $(220\ A\ 1/2)^2$:

$$< \left[\mathcal{C}^{A\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{Y}_{2\ldots} \right]_{\frac{1}{2}} \mid V(\vec{x}) \mid \left[\mathcal{C}^{A\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{Y}_{22\ldots} \right]_{\frac{1}{2}} >$$

$$= 0.8\ V_{1D_2}(x) + 0,1\ V_{3D_1}(x) + 0.1667\ V_{3D_2}(x) + 0.2333\ V_{3D_3}(x)\ , \tag{74}$$

dominée par l'interaction à deux corps dans l'état ${}^1D_2$:

$$V_{1D_2}\ (x) = V_c\ (x) + 6\ V_{L^2}\ (x)\ , \tag{75}$$

et comparé au RSC, le peu d'attrait du potentiel central singulet pair du SSC est encore aggravé par la contribution repoussante du terme L^2 (figures (58) et (60), figure 1b réf. [(32)]);

(ii) la contribution dans l'état $(312 + 3/2)^2$ purement égale à $V_{{}^1P_2}\ (x)$;

(iii) les contributions $(112 + 3/2)\ (110 + 1/2)$ et $(112 + 3/2)^2$, toutes deux combinaisons des interactions à deux corps
3
0, 1, 2

Le comportement de la contribution $(111 + 1/2)^2$ est opposé car celle-ci est dominée par l'interaction

$$V_{1P_1}\ (x) = V_c\ (x) + 2\ V_{L^2}\ (x) \tag{76}$$

plus repoussante dans le RSC, en dépit du terme L^2 dans le SSC (figure 10 réf. [(29)], figures 1 a, 1 b réf. [(32)]).

Des estimations de l'énergie du triton en tenant compte des contributions du moment cinétique élevé ont été faites par van Wageningen [(3

et Hennell et Delves [38] :

	RSC	SSC (A)
Wageningen	-6.84 ± 0.2	< -6.5
Hennell	-7.75 ± 0.5	
nous	-7.18	-7.58

(77)

Le résultat de Hennell et Delves a été obtenu par un calcul de type variationnel. Les résultats des deux premières lignes sont en fait des extrapolations à un nombre infini d'ondes partielles dans le formalisme hypersphérique pour van Wageningen et à un nombre infini de paramètres pour Hennell et Delves, aussi les erreurs indiquées par ces auteurs ne sont probablement pas sous estimées. Si nous estimons l'odre de grandeur de l'erreur sur notre résultat à $\pm$ 100 keV, ce dernier est fort heureusement compatible avec les deux précédents ! Notre faible valeur de l'énergie de perturbation U^1 pour le potentiel RSC tend à infirmer l'hypothèse de Hennel et Delves expliquant leur très basse énergie par les contributions des états de moment angulaire élevé dans le potentiel (l et J) et dans le couplage des trois particules (λ et l) [38]. La relativement faible contribution de l'interaction à deux corps dans le sous espace des états impairs est une consèquence directe de la faiblesse des potentiels correspondants [32]

Enfin, il est instructif de comparer le tableau des éléments de matrice (73) avec celui des probabilités de différents états à trois corps que nous avons utilisés pour analyser nos fonctions d'onde (tableau (73), probabilités %).

	λ	l	L	σ	S T =1/2	RSC	SSC (A)	SSC (B)	SSC (C)
S	0	0	0	A	1/2	87.94	91.11	91.58	89.90
	2	2	0	A	1/2	1.42	.96	.86	.86
S'	0	0	0	-	1/2	.87	.73	.68	.68
	2	2	0	-	1/2	.07	.05	.04	.04
	1	1	0	+	1/2	.85	.73	.68	.69
D	0	2	2	-	3/2	3.29	2.29	2.15	2.79
	2	2	2	-	3/2	.19	.13	.12	.16
	2	0	2	-	3/2	1.12	.88	.87	1.05
	1	1	2	+	3/2	2.69	2.10	2.08	2.56
	1	3	2	+	3/2	.42	.25	.22	.30
	3	1	2	+	3/2	1.16	.76	.71	.94
P	2	2	1	A	1/2	.003	.001	.001	.002
	2	2	1	-	1/2	.013	.007	.006	.010
	2	2	1	-	3/2	.013	.007	.006	.010
	1	1	1	+	1/2	.024	.012	.011	.018
	1	1	1	+	3/2	.024	.012	.011	.018

(78)

Ce tableau reflète la tendance générale constatée sur les éléments de matrice (73). Toutefois, si on désire déterminer une amplitude de Faddeev pour le triton, tenant compte dès le départ d'interactions

autres que paires $J \leq 1$, en tronquant le développement (16) dans la base L - S, il est en bonne logique préférable de se servir du tableau (73) pour décider des états à ajouter dans ce développement.

En conclusion, il est bon de remarquer que le principal avantage des équations de Faddeev pour le triton réside en la possibilité d'avoir une fonction d'onde exacte (aux erreurs numériques près), grâce au procédé de troncation de Kim et Tubis [18], pour une interaction effective dans les états ^1S_o , $^3S_1$, $^3D_1$ et $^3S_1 - {}^3D_1$, car naturellement antisymétrique ; l'utilisation de cette fonction d'onde est donc ensuite parfaitement légitime pour un traitement perturbatif des autres termes de l'interaction.

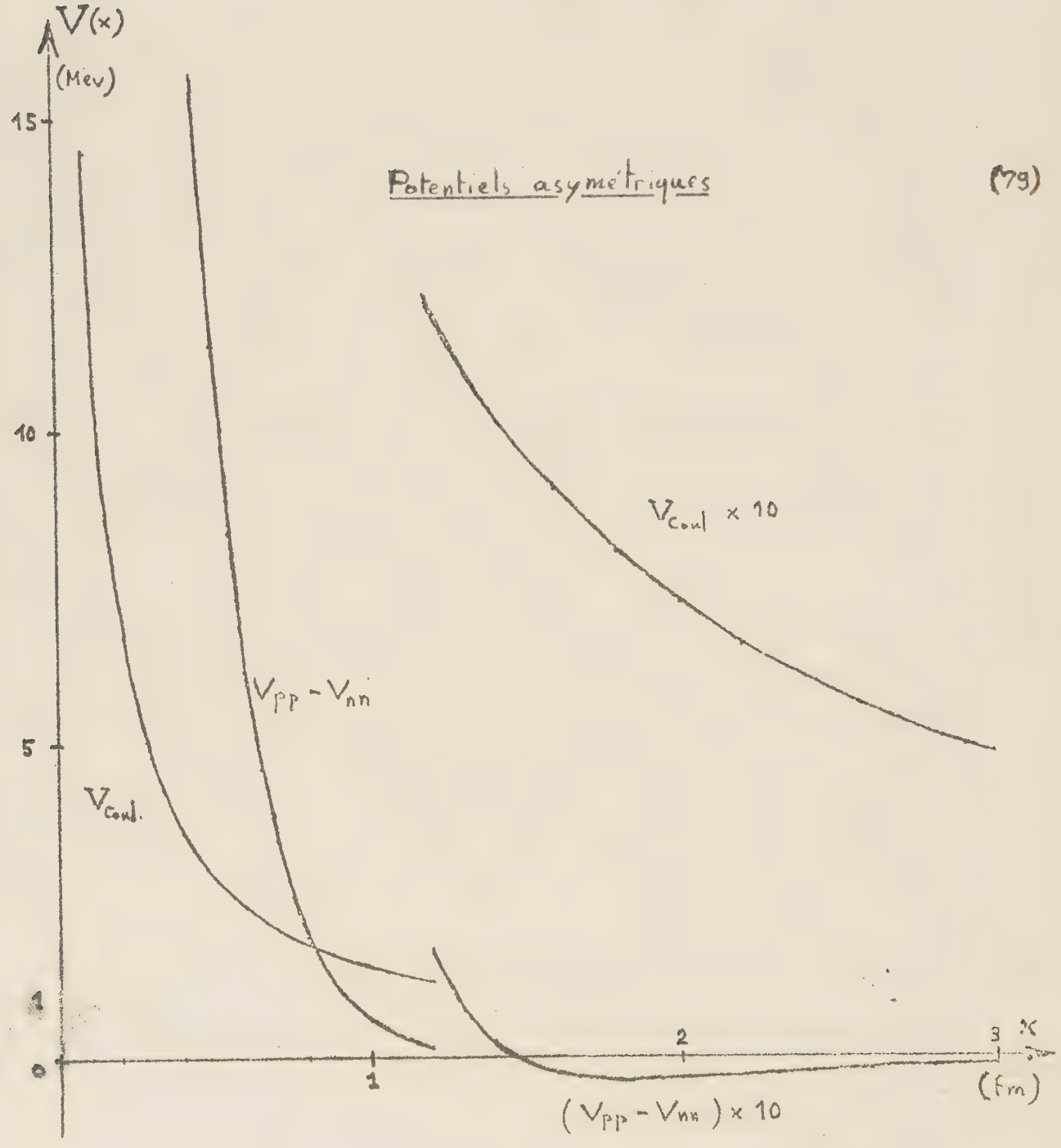
7 - La différence d'énergie triton -hélium trois

La différence d'énergie entre les états fondamentaux de l'hélium trois et du triton est très bien connue expérimentalement :

$$\Delta = 0.764 \quad \text{Mev}$$

La cause principale de cette différence d'énergie est la répulsion électrostatique entre les deux protons de ^3H_e ; la présence de cette interaction suffit pour que le ^3H_e ne soit plus dans un état propre d'isospin T = 1/2. Une faible contribution à la différence provient de l'asymétrie de charge des forces nucléaires. Cette asymétrie, nécessairement faible, doit exister car la force nucléon-nucléon provient de l'échange de mésons que l'on sait être des mélanges de mésons isoscalaires (ρ, η) et isovecteurs (ω, π).

Nous avons vérifié [16] que l'estimation des contributions du potentiel proton proton dont dérive la force de Coulomb [39] et d'un potentiel asymétrique dérivant des échanges de mésons récemment proposé par Henley et Keliher [40], peut parfaitement se faire par un calcul perturbatif. Comparés aux interactions nucléaires (chapitre 3) , ces potentiels sont peu intenses (des erreurs existent dans les formules (7) et (10-a) réf [40], mais la figure 4 de la même référence est exacte [41]).


V(x)
(Mev)
15
10
5
1
0
1
2
3
x
(Fm)
Potentiels asymétriques
(79)
$V_{coul} \times 10$
$V_{pp} - V_{nn}$
$V_{coul.}$
$(V_{pp} - V_{nn}) \times 10$

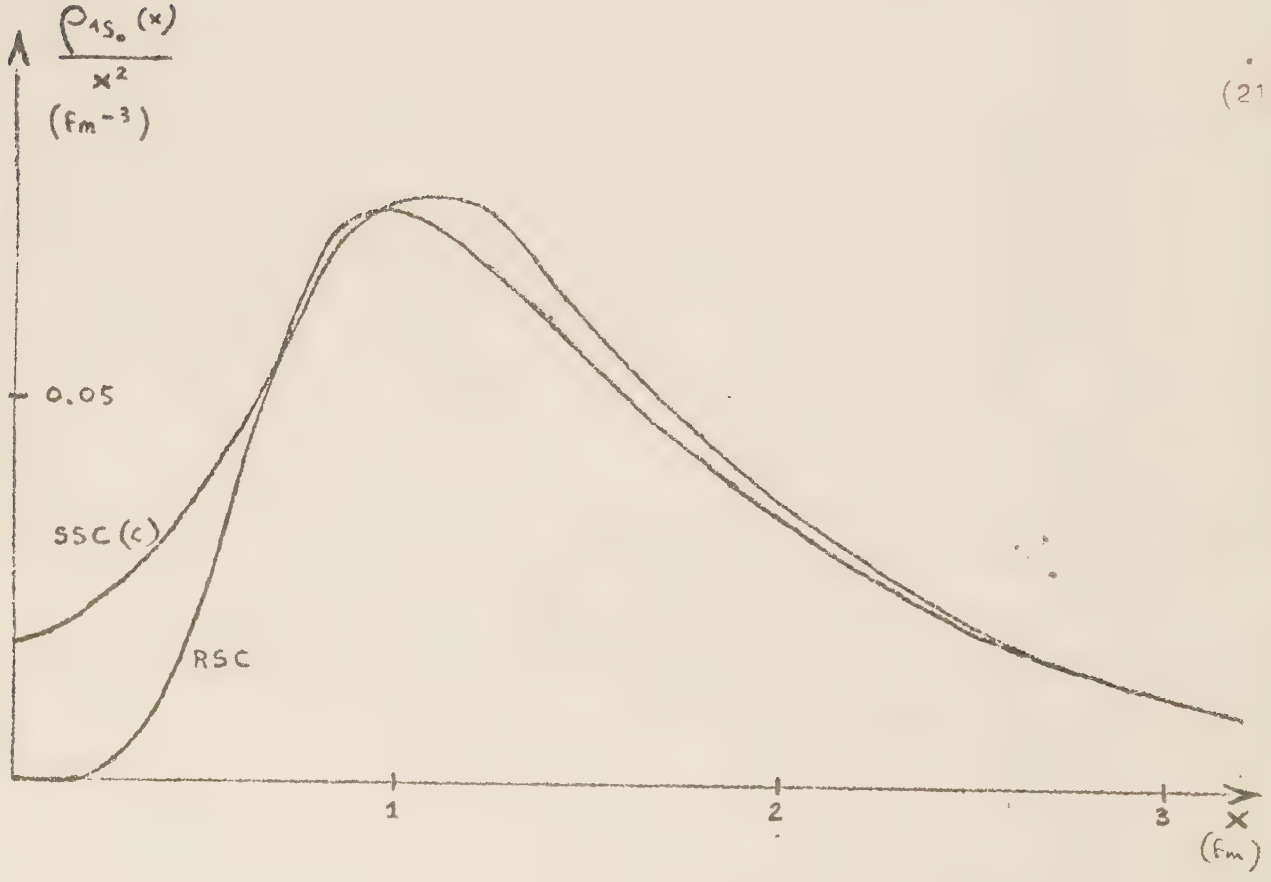
Nos solutions pour le triton dans les potentiels RSC et SSC pour les états pairs $J \leq 1$ nous donnent les énergies coulombiennes suivantes (au premier ordre des perturbations) :

	E_{coul} (^3He) (MeV)	$\langle r^2_{ch} \rangle^{1/2}_{^3H}$ (F)	$\langle r^2_{ch} \rangle^{1/2}_{^3H}$ (F)
RSC	0.575	1.65	1.90
SSC (A)	0.611	1.64	1.85
SSC (B)	0.620	1.62	1.82
SSC (C)	0.602	1.62	1.83
Exp.	0.764 ?	1.70	1.87

(80)

L'énergie coulombienne que nous trouvons associée au potentiel RSC est relativement faible; ceci est sans doute du à l'importance du coeur répulsif qui diminue la probabilité de présence des particules à des distances assez faibles pour que le potentiel coulombien (figure (79)) contribue. L'énergie coulombienne est systématiquement inférieure à la différence d'énergie observée entre ^3He et ^3H (42) ; ceci constitue un indice de l'existence d'une partie de l'interaction nucléon-nucléon asymétrique c'est-à-dire différente pour deux protons et pour deux neutrons. Nous avons vérifié (16) que le potentiel asymétrique proposé par Henley et Keliher (figure 79) parvient, tout au moins en signe et ordre de grandeur, à combler la différence entre l'énergie coulombienne et la différence d'énergie expérimentale.

Nous avons constaté par nos calculs de triton avec des interactions aussi différentes que celle de Reid (figure (58)) et celle de Gogny, Pires et de Tourreil (figure (59)) que l'énergie coulombienne et l'énergie correspondant à la partie à courte portée du potentiel de Henley (échange [illegible]) sont sensibles à la probabilité de présence de deux particules (corrélation) à petite distance, induite par la partie à courte portée du potentiel nucléon -nucléon. Ces corrélations à courte portée peuvent être très différentes, et c'est en ce sens que l'on peut dire que le potentiel RSC a un coeur beaucoup plus dur que les potentiels SSC. A titre indicatif, pour nos solutions, ces corrélations de deux particules dans l'état relatif ^1S_o dans le triton ont la forme suivante :



(21)

La corrélation $\rho_{^1S_0}(x)$ est normalisée de telle sorte que

$$\int_0^\infty \rho_{^1S_0}(x)\, dx = P_{^1S_0} \qquad (82)$$

où $P_{^1S_0}$ est la probabilité de cet état à deux corps dans le triton soit, dans notre cas, 0.44 pour le potentiel RSC et 0.45 pour le SSC (C) [20]. Les corrélations à courte portée sont mal connues dans les noyaux plus lourds et ce peut être précisément une des raisons pour lesquelles le potentiel de Henley et Keliher comme dans notre solution avec le potentiel de Gogny et al. [16] surestime les différences d'énergie des noyaux miroirs [43].

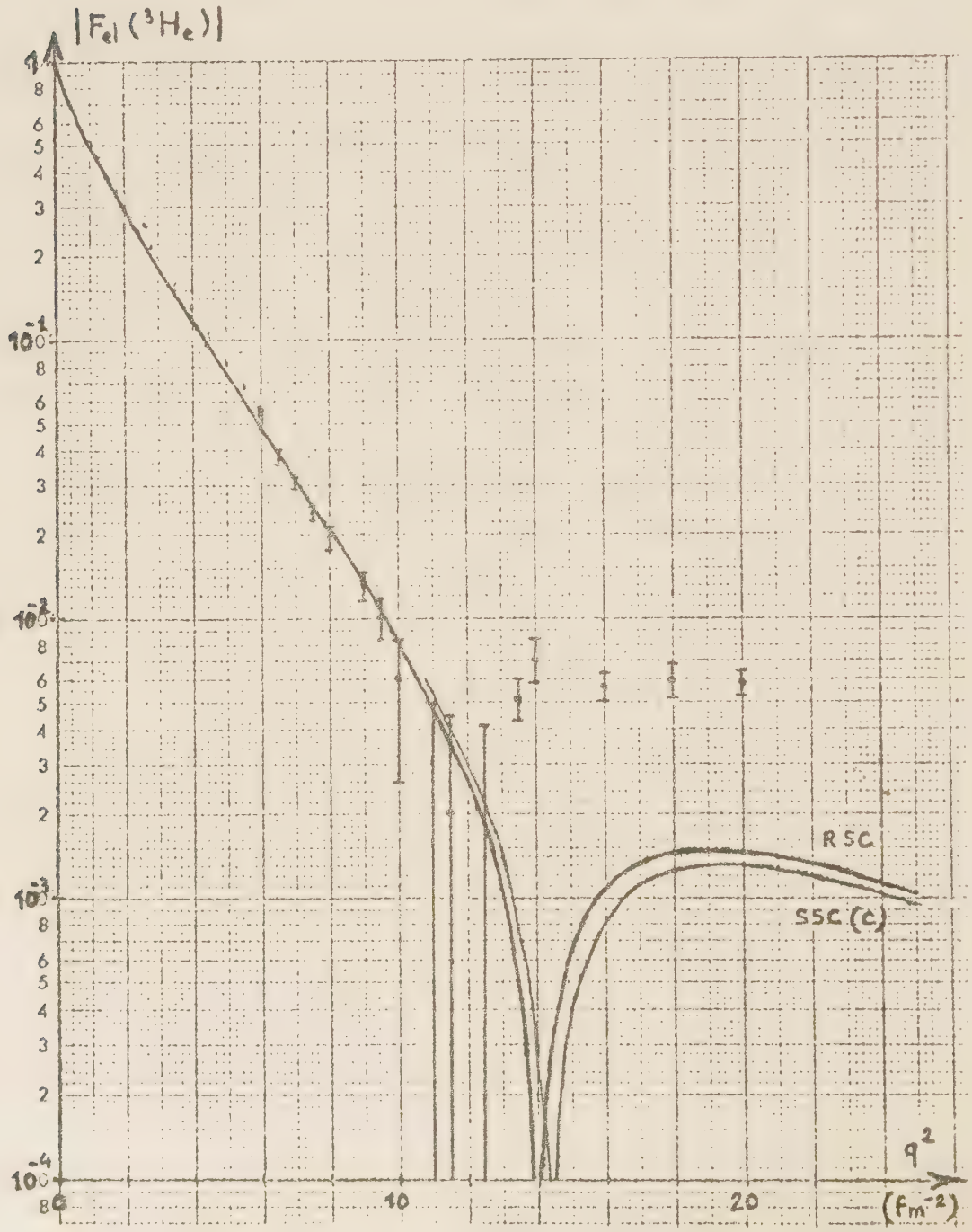
Le fait que l'interaction nucléon -nucléon indépendante de la charge soit suffisante pour prédire l'ordre de grandeur de la différence entre les rayons de charge du ^3He et du ^3H (tableau (80)) est une indication du peu d'influence des forces brisant la symétrie de charge sur les observables autres que l'énergie. Ceci est d'ailleurs bien vérifié par le calcul exact prenant directement en compte ces forces [16]. Les observables données dans le tableau (80) sont calculées pour des protons ponctuels ; les corrections de taille finie sont de quelques pourcents [42]

8 - Les facteurs de forme électriques

Le facteur de forme électrique est la transformée de Fourier de la densité de charge électrique dans le noyau et est obtenu expérimentalement par la mesure de la distribution angulaire des électrons diffusés élastiquement. Le mécanisme d'interaction électron nucléon est, en ce qui nous concerne,

assez bien connu, pour que le facteur de forme constitue un critère de validité de la fonction d'onde plus sûr que l'énergie.

Les facteurs de forme correspondant à nos solutions pour les quatre potentiels que nous avons utilisés ne différent notablement que par la position du premier minimum de diffraction. Nous comparons sur la figure (83), deux de ces facteurs de forme avec les valeurs mesurées par Mc Carthy et al. (44)



(83)

Les facteurs de forme ont été calculés en utilisant les expressions analytiques données par Janssens et al. [45] pour les facteurs de forme du proton et du neutron ; les expressions analytiques données par Hughes et al. [46] rendent compte d'un plus grand nombre d'expériences sur les nucléons mais n'induisent aucune modification du facteur de forme du ^{3}He. La figure (83) nous montre que le facteur de forme est loin d'être reproduit correctement en ce qui concerne la position du minimum de diffraction et l'intensité du second maximum. Nous obtenons en fait, pour nos différentes solutions :

	Energie perturbée (Mev)	Position du minimum (Fm^{-2})	Hauteur du 2e maximum
RSC	-7.18	14.0	1.4×10^{-3}
SSC (A)	-7.58	14.7	1.2×10^{-3}
SSC (B)	-7.60	15.0	1.2×10^{-3}
SSC (C)	-7.34	14.4	1.3×10^{-3}
Exp.	-8.48	$\simeq$ 11.8	7×10^{-3}

(84)

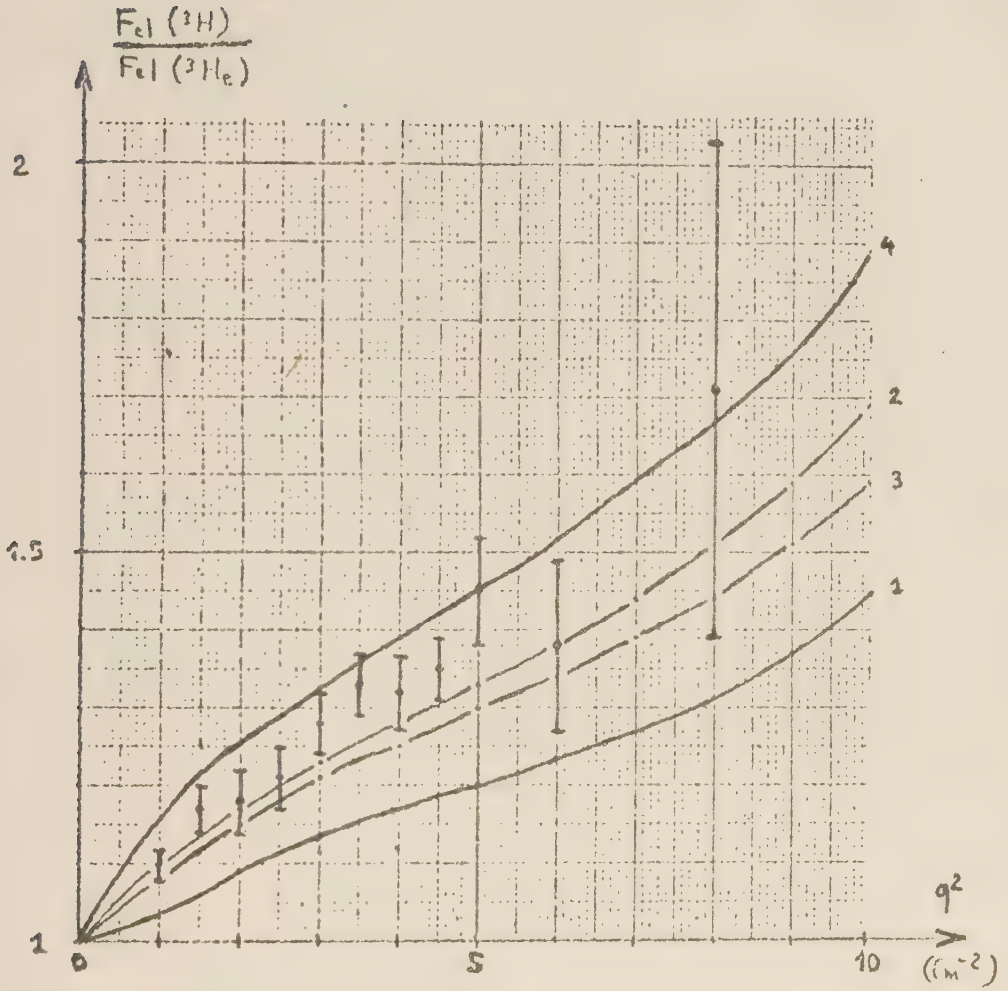
Il est remarquable, sur ces résultats, qu'à une amélioration de la position du minimum calculée corresponde dans chaque cas une dégradation de l'accord (!) entre l'énergie calculée et l'énergie expérimentale. La difficulté d'accorder en même temps énergie et facteur de forme aux valeurs expérimentales est réelle et n'a pas encore trouvé de solution satisfaisante [15, 19, 38, 47 - 49]
Un examen des résultats publiés montre que la tendance que nous décelons sur le tableau (84) est en fait absolument générale : quels que soient le potentiel et la méthode utilisés pour l'état

lié de trois nucléons, une amélioration du facteur de forme va généralement de pair avec une déterioration de l'énergie. Cette tendance est d'ailleurs constatée de façon systématique par Haftel [50] sur un modèle de trois bosons avec divers potentiels déduits par transformations unitaires. Il ne faut d'autre part pas s'attendre à ce que le facteur de forme puisse être amélioré par les corrections de cinématique relativiste, car celles-ci estimées par Friar [51] repoussent la position du minimum (figure (83)) d'environ 0.8 fm^{-2} vers les valeurs de q^2 plus élevées.

Le facteur de forme est la transformée de Fourier de la distribution de charge : étant donnée la forme de cette distribution, les variations de son rayon sont en première approximation inverses de celles de la postion du premier minimum de diffraction. Il nous faut donc admettre que les seules fonctions d'onde de trois nucléons que l'on sache actuellement construire correspondent paradoxalement soit à une énergie de liaison insuffisante soit à un rayon trop petit (ou plus souvent, les deux).

Le facteur de forme du triton est moins bien connu expérimentalement ; la comparaison des différences théoriques entre les facteurs de forme du ^3He et du ^3H est néammoins intéressante, car cette différence dépend directement de la présence des états autres que L = 0, symétrie d'espace (état S) dans le triton ; en effet, le modèle de triton où n'intervient que la composante S ne prédit pas de différence entre ^3He et ^3H. On peut comparer, figure (85), le rapport des facteurs de forme de ces noyaux aux valeurs expérimentales de Collard et al. [52]

La courbe 1 représente le rapport des facteurs de forme pour les solutions que nous avons analysées ici, correspondant aux potentiels RSC et SSC (C) [20] ; les courbes pour les potentiels SSC (A) et SSC (B) sont très voisines de la courbe 1 ;



(85)

La courbe 2 correspond à la solution obtenue pour le triton avec les composantes 1, 2 et 3 du tableau (27) et le potentiel RSC [15] ; la différence entre les courbes 1 et 2 indique la

sensibilité de cette observable à la fonction d'onde ;

par contre, le fait d'ajouter les composantes 4, 5 et 6 du tableau (27) [15] change peu le rapport, qui est donné par la courbe 3 ;

enfin, on constate la sensibilité de cette observable aux effets d'asymétrie proton - neutron, puisque la courbe 4 est le résultat d'un calcul identique à celui de la courbe 2 mais où le triton est obtenu en considérant l'interaction RSC et le potentiel asymétrique de charge de Henley et Keliher [40] et l'Hélium trois en ajoutant à ces potentiels le potentiel coulombien [16] ; nous avons trouvé que cette observable est la seule qui soit sensible au mélange d'isospin T = 3/2 dans ^{3}He et ^{3}H puisque le déplacement du minimum de diffraction est inférieur à 0.2 fm^{-2} [16].

On peut espérer, au vu de la figure (85), qu'un calcul du type de la courbe 1 mais incluant les potentiels asymétriques de charge conduirait à un bon accord avec l'expérience. Quoiqu'il en soit, la sensibilité de cette observable au type de calcul rend sa détermination expérimentale, c'est-à-dire la mesure du facteur de forme du triton pour des transferts supérieurs à 10 fm^{-2}, du plus haut intérêt.

V - CONCLUSIONS

Les conclusions que nous pouvons tirer sur l'ensemble des résultats que nous avons obtenus sont de deux ordres, les unes concernant la méthode que nous avons décrite dans les chapitres I et II, les autres, plus physiques, concernant la structure de l'état fondamental de trois nucléons et les enseignements que l'on peut ou non espérer en obtenir.

1 - Les équations de Faddeev dans l'espace de configuration

En laissant de côté toutes considérations spécifiques aux diverses méthodes de résolution numérique, les différentes approches au problème de l'état fondamental de trois nucléons peuvent se classer en quatre catégories. Très schématiquement, nous pouvons rappeler les performances plus (+) ou moins (-) bonnes de ces catégories de méthode en ce qui concerne certains critères :

	Détermination de l'énergie et de la fonction d'onde	Sécurité du résultat	Antisymétrie de la fonction d'onde	Possibilité de traiter un potent. réaliste	Possibilité de traiter un coeur dur	Possibilité d'un calcul de perturbation
ions de ddeev	+	-	+	+	-	+
ion de dinger	+	-	-	-	-	-
l varia - ol	-	+	+	+	+	-
niques sphériques	+	-	+	-	-	-

Plus particulièrement, en ce qui concerne les équations de Faddeev pour l'état lié de trois nucléons, on peut faire une comparaison similaire entre les trois espaces jusqu'à maintenant proposés pour leur résolution :

	Energie explicite en tant que val. propre	Présence de dérivées	Multiplicité des intégrales	Intégrale à borne variable	Nécessité de la matrice t à deux corps	Facilité du calcul des observables
Variables $\vec{p}, \vec{q}$	-	+	- 2	-	-	-
Variables $\vec{x}, \vec{q}$	+	- 1	- 2	+	+	-
Variables $\vec{x}, \vec{y}$	+	- 2	- 1	+	+	+

(37)

Ces tableaux comparatifs joints au fait que le principe de correspondance entre espace d'impulsion et espace de configuration rend ce dernier plus adapté à la description d'un état lié, bien localisé dans l'espace, montrent que la considération des équations de Faddeev dans l'espace de configuration offre un certain nombre d'avantages.

2 -... et leur résolution numérique

Les équations de Faddeev pour l'état lié de trois nucléons se réduisent à une seule équation dans l'espace de configuration $\vec{x}$, $\vec{y}$. Le développement de l'amplitude de Faddeev sur un nombre fini d'états de base de trois nucléons conduit à un système d'équations intégrales aux dérivées partielles par rapport aux variables indépendantes x et y. L'énergie apparait explicitement sous forme de valeur propre. Nous avons montré qu'une des méthodes existantes pour

la résolution des équations aux dérivées partielles convient pour la résolution de ce système. Il se trouve que cette méthode, dite de "sur - relaxations successives " permet de résoudre un système linéaire par itérations ne faisant intervenir que quelques éléments, rapidement calculables, de sa matrice ; au contraire, la résolution des équations de Faddeev dans l'espace des impulsions p et q conduit à des équations couplées purement intégrales ; la résolution numérique de celles-ci exige des matrices dont le rang est pratiquement immédiatement limité par les ordinateurs.

Dans l'espace de configuration, le potentiel nucléon nucléon intervient explicitement, et comme un simple opérateur multiplicatif, si il est local. La simplicité et la rapidité d'exploitation de la méthode font que la recherche de la solution du triton dans un potentiel réaliste donné n'exige qu'une vingtaine de minutes ce qui est un avantage certain sur les méthodes variationnelles ou les méthodes faisant appel à l'équation de Schrödinger.

Enfin, le peu d'exigence de la méthode de relaxation en nombre de mémoires d'ordinateur autorise les perfectionnements en ce qui concerne la précision des solutions. Nous devons ajouter que le travail de détermination de la précision de la solution du triton par cette méthode reste à faire.

3 - Que peut-on en faire d'autre ?

Il ne semble pas que l'utilisation des équations de Faddeev dans l'espace de configuration ait un intérêt pratique pour d'autres problèmes que celui de l'état lié de trois nucléons. Pour trois particules n'appartenant pas à un même isomultiplet, les amplitudes de Faddeev pour les trois voies ne sont plus équivalentes ; le

nombre d'équations peut donc être multiplié par trois.

Notre méthode est inapte au traitement d'une interaction à coeur dur, du fait de la troncation du développement de l'amplitude de Faddeev (16) ; ainsi, cette méthode semble échouer pour la détermination du fondamental des trimères (molécules tri-atomiques de gaz rares) du fait du comportement très singulier du potentiel de Lennard - Jones à courte distance (équivalent à x^{-12}).

Enfin, l'utilisation éventuelle des équations de Faddeev dans l'espace de configuration pour le traitement du problème de la diffusion de trois nucléons semble se heurter à de sérieuses difficultés :

le principe de correspondance défavorise l'utilisation de l'espace de configuration pour la description d'états non liés;

les valeurs des solutions sur les frontières du domaine d'intégration sont précisément les inconnues du problème (53), on n'a plus affaire à un problème de Dirichlet.

4 - Que peut-on en tirer ?

Le prétexte le plus invoqué pour l'étude théorique du triton a sans doute été la possibilité de distinguer des potentiels nucléon-nucléon réalistes équivalents en ce qui concerne les observables de deux nucléons. En effet, la description du triton par les équations de Faddeev montre l'intervention du potentiel hors de la couche d'énergie de façon extrême car l'énergie totale est négative et l'énergie de la particule libre, dans une voie, est purement cinétique, donc positive ; il s'ensuit que l'énergie restante pour les deux particules qui interagissent est très négative. Or, la comparaison de nos résultats, pour des potentiels de

structure aussi différents que ceux de Reid et de de Tourreil et Sprung (voir la corrélation, figure (81)), montre que les observables calculées pour le triton sont relativement peu éloignées. Une amélioration du calcul des énergies, par un traitement perturbatif des interactions négligées (tableau (72)), tend à rapprocher celles-ci ; ceci est particulièrement vrai pour les énergies du triton avec le potentiel C de de Tourreil et Sprung qui est le plus satisfaisant des trois présentés par ces auteurs. Cette constatation, que nous faisons sur des descriptions réalistes du triton, est en accord avec les faits suivants :

les écarts entre éléments de matrice de transition hors couche pour différents potentiels réalistes sont du même ordre que sur la couche d'énergie [54];

les calculs suffisament précis avec différents potentiels obtenus par transformation unitaire préservant le spectre de l'hamiltonien à deux nucléons, prédisent que l'énergie et le facteur de forme du triton sont peu affectés tant que la fonction d'onde du deuton reste la même à moyenne et longue portée [50, 55,56].

En conclusion, il semble donc qu'en ce qui concerne l'interaction à deux corps, on ne puisse espérer apprendre quelque chose par le triton, dès lors que le deuton est correctement décrit.

5 - Le problème du triton a t-il un intérêt ?

L'imprécision des calculs et la sensibilité de l'énergie du triton à la fonction d'onde ont jusqu'à maintenant empêché la comparaison longtemps espérée, mais peut-être illusoire, entre potentiels nucléon-nucléon. Les autres observables sont souvent moins sensibles à la fonction d'onde. En conséquence, une fonction d'onde du triton acceptable peut être un bon outil pour l'étude de phé-

nomènes nucléaires qui ne peut être qu'approximative dans les noyaux plus lourds, par exemple :

la symétrie de charge de la force nucléon-nucléon [16, 42]

l'influence des échanges de mésons sur les moments magnétiques des noyaux ^{3}H et ^{3}He et le taux de désintégration β de ^{3}H [34, 58, 59] ;

la constante de couplage pseudo scalaire induit intervenant dans les taux de capture des muons par ^{3}He [60].

Les désaccords persistants et opposés de l'énergie et du facteur de forme du triton avec les observations expérimentales méritent de trouver une solution. Il n'est peut être plus prématuré d'envisager l'existence d'une force à trois nucléons, attractive à longue portée et répulsive à courte portée, pour expliquer tout à la fois l'insuffisance de l'énergie de liaison, et la valeur trop grande pour le transfert de quantité de mouvement correspondant au minimum de la diffraction d'électrons.

APPENDICE A

Eléments de matrice entre états à trois corps

L'élément de matrice de l'interaction à deux corps, introduit pour la première fois dans l'équation (20), s'obtient facilement par découplage des trois particules et recouplage de la paire "en interaction", en fonction des éléments de matrices habituels de l'interaction à deux corps (3). Pour une interaction diagonale par rapport à l'isospin :

$$\langle \left[e^{\alpha S T} \otimes \ell \right]_J | V(x) | \left[e^{\alpha' S' T'} \otimes \ell \right]_J \rangle$$

$$= \delta_{\lambda\lambda'} \cdot \delta_{TT'} \cdot \sqrt{(2S+1)(2L+1)(2S'+1)(2L'+1)}$$

$$\cdot \sum_{\sigma t} e^{\alpha S T}(\sigma, t) \cdot e^{\alpha' S' T}(\sigma, t) \sum_{J} (2J+1) \cdot V_{ll'}^{\sigma J t}(x)$$

$$\cdot \sum_{j} (2j+1) \begin{Bmatrix} \tfrac{1}{2} & \lambda & j \\ \sigma & l & J \\ S & L & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tfrac{1}{2} & \lambda & j \\ \sigma & l' & J \\ S' & L' & J \end{Bmatrix}$$

(A - 1)

Les coefficients $c^{\alpha S T}(\sigma, t)$ sont les composantes des états à trois corps $e^{\alpha S T}$, sur les états de bons spin et isospin pour la paire "en interaction", donnés par le tableau (14). Les fonctions $V_{ll'}^{\sigma J t}(x)$ sont les éléments de matrice habituels, en général notés $^{2\sigma+1}l_J$ (pour $l = l'$) ou $^3l - {}^3l'$ pour $l \neq l'$; par exemple :

$$< \lambda \; l \; L \; \alpha \; S \; T \,|\, V(x) \,|\, \lambda' \; l' \; L' \; \alpha' \; S' \; T' > =$$

0	0	0	A	1/2	1/2	0	0	0	A	1/2	1/2	=	$\frac{1}{2}(V_{1S_o} + V_{3S_1})$
0	0	0	-	1/2	1/2	0	0	0	-	1/2	1/2	=	$\frac{1}{2}(V_{1S_o} + V_{3S_1})$
0	0	0	-	1/2	1/2	0	0	0	A	1/2	1/2	=	$\frac{1}{2}(-V_{1S_o} + V_{3S_1})$
0	2	2	-	3/2	1/2	0	2	2	-	3/2	1/2	=	V_{3D_1}
0	2	2	-	3/2	1/2	0	0	0	A	1/2	1/2	=	$-\frac{1}{\sqrt{2}} V_{3S-3D}$
0	2	2	-	3/2	1/2	0	0	0	-	1/2	1/2	=	$\frac{1}{\sqrt{2}} V_{3S-3D}$

(A- 2)

avec :

$$V_{1S_o} = V_C(x) \qquad \text{(A-3)}$$

dans le sous espace singulet pair, et :

$$V_{3S_1} = V_c(x)$$

$$V_{3D1} = V_c(x) - 2\,V_T(x) + 6\,V_{L2}(x) - 3\,V_{LS}(x) - 3\,V_{LL}(x) + 21\,V_Q(x)$$

$$V_{3S-3D} = 2\sqrt{2}\,.\,V_T(x) \qquad \text{(A-4)}$$

dans le sous espace triplet pair

Interaction dépendant de l'isospin

On se place toujours dans la voie 1 (2 - 3). Pour l'interaction coulombienne de deux protons

$$V_{Coul}(x) = \frac{(1 + \tau_{z_2})(1 + \tau_{z_3})}{4} \; \frac{e^2}{x} \qquad \text{(A - 5)}$$

dans He^3, on a aussi bien :

$$V_{coul}(x) = \frac{1 - \tau_{z_1}}{2} \quad \frac{e^2}{x} \qquad (A - 6)$$

d'où

$$\langle [e^{\alpha S T} \otimes Y_{\lambda L}(\hat{x}, \hat{y})]_{J, T_z = 1/2} | V_{C-1}(x) | [e^{\alpha' S' T'} \otimes Y_{\lambda' L'}(\hat{x}, \hat{y})]_{J, T_z = \frac{1}{2}} \rangle$$

$$= \delta_{\lambda\lambda'} \; \delta_{II'} \; \delta_{LL'} \; \delta_{SS'} \; \frac{e^2}{x} \langle e^{\alpha S T}, T_z = 1/2 | \frac{1 - \tau_{z_1}}{2} | e^{\alpha' S' T'}, T_z = 1/2 \rangle$$

(A - 7)

avec, par exemple [3] :

$$\langle e^{\alpha S T}, T_z = 1/2 | \frac{1 - \tau_{z_1}}{2} | e^{\alpha' S' T'}, T_z = 1/2 \rangle =$$

A	1/2	1/2	A	1/2	1/2	$= \frac{1}{3}$
-	1/2	1/2	-	1/2	1/2	$= \frac{1}{3}$
-	1/2	1/2	A	1/2	1/2	$= -\frac{1}{3}$
-	3/2	1/2	-	3/2	1/2	$= 0$

(A - 8)

Nous avons vérifié [16] que la probabilité d'observer un isospin T = 3/2 dans ^{3}He est négligeable ; la fonction d'onde de ^{3}He peut donc s'obtenir de la même façon que celle du triton mais en utilisant, au lieu de (A - 3) :

$$V_{^1S_0} = V_C(x) + \frac{2}{3} \quad \frac{e^2}{x} \qquad (A - 9)$$

APPENDICE B

La fonction géométrique $h^{L}_{\lambda' l' \lambda l}(x,y,u)$

Cette fonction est définie par l'équation (24) et intervient dans le système intégro-différentiel (26) et le calcul de la fonction d'onde (29,30). L'expression la plus pratique pour le calcul numérique est obtenue dans la référence (3) :

$$h^{L}_{\lambda' l' \lambda l}(x,y,u) = \frac{xy}{x'y'} (-)^{l+L} \frac{(2\lambda+1)(2l+1)}{2^{\lambda+1}\, y'^{\lambda}\, x'^{\lambda}} \sqrt{(2\lambda)!\,(2l)!\,(2\lambda'+1)(2l'+1)}$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{k_{max}} (-)^{k} (2k+1) \cdot P_k(u) \cdot \sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2=\lambda \\ l_1+l_2=l}} y^{\lambda_1+l_1}\, x^{\lambda_2+l_2} \frac{(-)^{l_2}\, (\sqrt{3})^{\lambda_2+l_1}}{\sqrt{(2\lambda_1)!\,(2\lambda_2)!\,(2l_1)!\,(2l_2)!}}$$

$$\cdot \sum_{\lambda'' l''} (2\lambda''+1)(2l''+1) \begin{pmatrix} \lambda_1 & l_1 & \lambda'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & l_2 & l'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & \lambda'' & \lambda' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & l'' & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{Bmatrix} l' & \lambda' & L \\ \lambda'' & l'' & k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda \\ l_1 & l_2 & l \\ \lambda'' & l'' & L \end{Bmatrix}$$

avec : (B - 1)

$$k_{max} = \tfrac{1}{2}(\lambda'+l'+\lambda+l)$$

et toujours : (B - 2)

$$x' = \tfrac{1}{2}\sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}\,xyu + 3y^2}$$

$$y' = \tfrac{1}{2}\sqrt{y^2 + 2\sqrt{3}\,xyu + 3x^2} \qquad (B - 3)$$

Une expression formellement plus simple que (B - 1) est donnée par Noyes [1], mais elle se révèle beaucoup moins pratique à programmer.

APPENDICE C

Le terme de source en coordonnées polaires

Le passage en coordonnées polaires ρ et ϑ telles que :

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\vartheta \\ y &= \rho \sin\vartheta \end{aligned} \qquad (C-1)$$

décrit sur la figure (51), et les considérations géométriques de la figure (34), conduisent pour l'intégrale figurant dans le terme de source , à

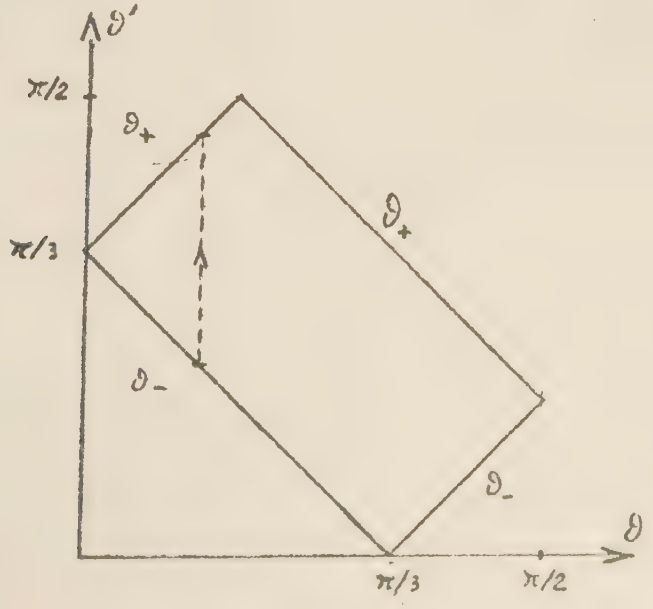
$$\int_{-1}^{1} du \; . \; h_{ij}(x, y, u) \quad \varphi'_j(x', y')$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{\vartheta_-}^{\vartheta_+} d\vartheta' \frac{\cos\vartheta' \sin\vartheta'}{\cos\vartheta \sin\vartheta} \; h_{ij}(\rho, \vartheta') \cdot \varphi'_j(\rho, \vartheta') \qquad (C-2)$$

où x' et y' sont donnés par l'expression (B - 3) et

$$\vartheta' = \text{arc tg} \; \frac{y'}{x'} \qquad (C-3)$$

La construction (34) nous montre que pour ϑ donné, le domaine d'intégration sur ϑ' est intérieur au rectangle (2,3) :



(C - 4)

L'équation de relaxation en coordonnées polaires

Le laplacien devient :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \qquad (C - 5)$$

En un noeud (i, j), c'est-à-dire $\rho = i\,\delta_\rho$, $\vartheta = j\,\delta_\vartheta$, du réseau polaire (51), on commence par calculer, pour toutes les amplitudes de Faddeev r, les termes de source (30) :

$$\psi_r^{(k)}(i,j) = \frac{4\,\delta\rho}{3\sqrt{3}} \sum_{j'=j_-}^{j_+} w_{j'} \sum_s \hat{h}_{rs}(j,j') \cdot \psi_s^{(k)}(i,j') \qquad (C - 6)$$

où $\hat{h}_{rs}$ est définie par :

$$\hat{h}_{rs}(x,y,u) = \frac{x'\,y'}{x\;\;y}\; h_{rs}(x,y,u) \qquad (C - 7)$$

et les poids $w_{j'}$ sont ceux de la méthode de Simpson, grâce à notre choix (53) pour le pas δ_ϑ :

$$w_{j'} = 1,\ 4,\ 2,\ 4,\ 2,\ \ldots\ldots,\ 2,\ 4,\ 1 \qquad (j' = j_-\ ,\ j_-+1,\ \ldots\ldots,\ j_+) \qquad (C - 8)$$

On calcule ensuite, pour tout r, la solution de l'équation aux différences finies n° r, i, j :

$$\bar{\psi}_r^{(k)}(i,j) = \Big\{ \psi_r^{(k-1)}(i,j) - \frac{M\,\delta\rho^2}{\hbar^2} \cdot V_{rr}(i,j) \cdot \hat{\psi}_r^{(k)}(i,j)$$

$$- \frac{M\,\delta\rho^2}{\hbar^2} \sum_{s \neq r} V_{rs}(i,j) \left[\psi_s^{(k)}(i,j) + \hat{\psi}_s^{(k)}(i,j) \right]$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{2i}\right) \psi_r^{(k)}(i+1,j) + \left(1 - \frac{1}{2i}\right) \cdot \psi_r^{(k)}(i-1,j)$$

$$+ \frac{1}{i^2 \cdot \delta\theta^2} \left[\psi_r^{(k)}(i,j+1) + \psi_r^{(k)}(i,j-1) \right] \Big\}$$

$$/ \left\{ 2 + \frac{2}{i^2\,\delta\theta^2} - \frac{M\,\delta\rho^2}{\hbar^2} \left[p - V_{rr}(i,j) - \frac{l_r(l_r+1)}{i^2 \cdot \cos^2(j\delta\theta)} - \frac{\lambda_r(\lambda_r+1)}{j^2 \sin^2(j\,\delta\theta)} \right] \right\}$$

(C - 9)

la correction (49) au noeud i, j pour l'amplitude r :

$$\delta\psi = \bar{\psi}_r^{(k)}(i,j) - \psi_r^{(k)}(i,j) \qquad \text{(C - 10)}$$

et la valeur "sur relaxée" que l'on retient finalement :

$$\psi_r^{(k)}(i,j) \leftarrow \psi_r^{(k)}(i,j) + \omega \cdot \delta\psi \qquad \text{(C - 11)}$$

REFERENCES

(1) H.P. NOYES and H. FIEDELDEY, in : Three-Particle Scattering in Quantum Mechanics, eds. J. GILLESPIE and J. NUTTALL (Benjamin, New York , 1968) p. 195

(2) H.P. NOYES, in : Three-body problem in nuclear and particle physics, eds. J.S.C. Mc KEE and P.M. ROLPH (North Holland, Amsterdam, 1970) p. 2

(3) A. LAVERNE and C. GIGNOUX, Rapport Interne I.S.N. 72 -11 (1972)

(4) G.A. BAKER, J.L. GAMMEL, B.J. HILLS and J.G. WILLS, Phys. Rev. 125 , 1754 (I962)

(5) I.M. BASSETT and B.R.E. LEDERER, Phys. Lett. 32B , 550 (1970)

(6) I.M. BASSETT, B.R.E. LEDERER and G.C. VORLIEK, in : 4 th AINSE Nuclear Physics Conference, University of Sydney (Février I972)

(7) G. DERRICK and J.M. BLATT, Nucl. Phys. 8 , 310 (1958)

(8) Y.E. KIM, J. Math. Phys. 10, 1491 (1969)

(9) R.A. MALFLIET and J.A. TJON, Nucl. Phys. A 127, 161 (1969)

(10) S.C. BHATT, J.S. LEVINGER and E. HARMS, Phys. Lett. 40 B , 23 (1972)

(11) B. SIEBERT, J.S. LEVINGER, and E. HARMS
Nucl. Phys. A 197, 33 (1972)

(12) C. GIGNOUX, thèse de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble (1972)

(13) J.J. BENAYOUN and C. GIGNOUX,
Nucl. Phys. A 190, 419 (1972)

(14) J.J. BENAYOUN and C. GIGNOUX
Lett. al. Nuovo Cim. 5 , 313 (1972)

(15) C. GIGNOUX and A. LAVERNE
Phys. Rev. Lett. 29, 436 (1972)

(16) C. GIGNOUX and A. LAVERNE in : Few Particle Problems in the Nuclear Interaction, eds. I. SLAVS et al. (North Holland Amsterdam, 1972), p. 411

(17) E.P. HARPER, Y.E. KIM and A. TUBIS,
Phys. Rev. C6, 126 (1972)

(18) Y.E. KIM and A. TUBIS,
Phys. Rev. C7, 1710 (1973)

(19) E.P. HARPER, Y.E. KIM and A. TUBIS,
Phys. Rev. Lett. 2B , 1533 (1972)

(20) A. LAVERNE and C. GIGNOUX
Nucl. Phys. A 203, 597 (1973)

(21) C. GIGNOUX and A. LAVERNE
Phys. Rev. C7, 1713 (1973)

(22) C. GIGNOUX and A. LAVERNE "Solution of the Faddeev equations for the bound state of three particles", non publié

(23) G.E. FORSYTHE and W.R. WASOW, "Finite-Difference Methods for the partial Differential Equations", Wiley (New York, 1960)

(24) S.H. CRANDALL, Proc. Roy. Soc. A 207, 416 (1951)

(25) R.V. SOUTHWELL, "Relaxation Methods in Theorical Physics", Oxford (Londres, 1952)

(26) W.F. AMES, "Numerical Methods for Partial Differential Equations", Nelson (Londres, 1969)

(27) J.M. EISENBERG and W. GREINER "Microscopic Theory of the Nucleus"North Holland (Amsterdam, 1972)

(28) J.S. LEVINGER, "Two and three Body Problems", cours de l'Institut de Physique Nucléaire d'Orsay (1973), non publié

(29) R.V. REID, Ann. of Phys. 50, 411 (1968)

(30) C. GIGNOUX, constatation non publiée

(31) D. GOGNY, P. PIRES and R. de TOURREIL Phys. Lett. 32 B, 591 (1970)

(32) R. de TOURREIL et D.W.L. SPRUNG,
Nucl. Phys. A 201, 193 (1973)

(33) R.A. MALFLIET and J.A. TJON, Ann. of Phys. 61, 425 (1970)

(34) E. FISCHBACH, E.P. HARPER, Y.E. KIM, A. TUBIS and W.K. CHENG
Phys. Lett. 38B, 8 (1972)

(35) A.D. JACKSON, A. LANDE and P.U. SAUER
Nucl. Phys. A 156, 1 (1970)

(36) R. Van WAGENINGEN, communication épistolaire

(37) A.D. JACKSON, A. LANDE and P.U. SAUER
Phys. Lett. 35 B, 365 (1971)

(38) M.A. HENNELL and L.M. DELVES
Phys. Lett. 40 B, 20 (1972)

(39) C.A. de COULOMB, Hist. Acad. Roy. Sc. 569 (1785)

(40) E.M. HENLEY and T.E. KELIHER,
Nucl. Phys. A 189, 632 (1972)

(41) T.E. KELIHER, correspondance

(42) K. OKAMOTO and C. PASK, Ann. of Phys. 68, 18 (1971)

(43) C. GIGNOUX, souvenir de Los Angeles

(44) J.S. Mc Carthy, I. SICK, R.R. WHITNEY and M.R. YEARIAN,
Phys. Rev. Lett. 25, 884 (1970)

(45) T. JANSSEN , R. HOFSTADTER, E.B. HUGHES and M.R. YEARIAN
Phys. Rev. 142 , 922 (1966)

(46) E.B. HUGHES, T.A. GRIFFY, M.R. YEARIAN and R. HOFSTADTER,
Phys. Rev. 139, B 548 (1965)

(47) Y.E. KIM and A. TUBIS, Phys. Lett. 38 B, 354 (1972)

(48) M. Mc MILLAN, Phys. Lett. 40B, 437 (1972)

(49) R. van WAGENINGEN, in : Present Status and Novel Developments
in the Many - Body Problem, Rome (1972)

(50) M.I. HAFTEL, Phys. Rev. C 7, 80 (1973)

(51) J.L. FRIAR, Phys. Lett. 43 B, 108 (1973)

(52) H. COLLARD, R. HOFSTADTER, E.B. HUGHES, A. JOHANSSON,
M.R. YEARIAN, R.B. DAY and R.T. WAGNER, Phys. Rev. 138, B 57
(1965)

(53) R.G. NEWTON, Ann. Of Phys. 74, 324 (1972)

(54) M. LHUILLIER , conversation

(55) Y.E. KIM,
Phys. Rev. C6, 1601 (1972)

(56) I.R. AFNAN and F.J.D. SERDUKE ,
Phys. Lett. 44 B, 143 (1973)

(58) E. HADJIMICHAEL, S.N. YANG and G.E. BROWN,
Phys. Lett. 39 B, 594 (1972)

(59) E.P. HARPER, Y.E. KIM and A. TUBIS,
Phys. Lett. 40 B, 533 (1972)

(60) B. AKHMADHODZAEV, V.B. BELYAEV, J. WRZECIONKO,
A.L. ZUBAREV, "Calculations of Properties of the Three-Nucleon Systems with Local Potentials", Communications of the Joint Institute for Nuclear Research (Dubna, 1971)